К трехмерной теореме Валена

А. В. Устинов

1. Введение. Пусть $\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(s)}$ – базисные узлы полной решетки

$$\Gamma=\{m_1\gamma^{(1)}+\dots+m_s\gamma^{(s)}:m_1,\dots,m_s\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{R}^s.$$

Решетка всегда будет считаться решеткой «общего положения»: координатные гиперплоскости не содержат узлов решетки, отличных от начала координат. (Относительно общего случая см. [1].) Обозначим через G_s конечную группу, действующую на $GL_s(\mathbb{R})$, порожденную следующими элементарными преобразованиями: 1) изменение знаков у элементов строки или столбца; 2) перестановка строк или столбцов. Две матрицы назовем *эквивалентными*, если одна может быть получена из другой с помощью некоторого преобразования из G_s.

Предположим, что $\{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}\}$ – базис двумерной решетки Γ, для которого не существует ненулевых узлов $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma$ таких, что

$$|\gamma_1|<\max\{|\gamma_1^{(1)}|,|\gamma_1^{(2)}|\},\qquad |\gamma_2|<\max\{|\gamma_2^{(1)}|,|\gamma_2^{(2)}|\}.$$

Вороной доказал (см. [2]), что это возможно тогда и только тогда, когда для некоторого преобразования $\Phi\in G_2$

$$\Phi\begin{pmatrix}\gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)}\\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & -b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix},\qquad \text{где}\quad 0\leqslant b_1\leqslant a_1,\quad 0\leqslant a_2\leqslant b_2.$$

Базис решетки называется *базисом Вороного*, если соответствующая ему матрица эквивалентна матрице вида $\left(\begin{smallmatrix}a_1 & -b_1\\ a_2 & b_2\end{smallmatrix}\right)$.

В статье [3] отмечено, что теорема Валена о приближении чисел подходящими дробями (см. [4], [5]) в терминах решеток имеет следующую интерпретацию: для любого базиса Вороного $\{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}\}$

$$\min\{|\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}|,|\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}|\}\leqslant\frac12\det\Gamma.$$

В той же статье было предложено уточнение теоремы Валена

$$|\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}|+|\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}|\leqslant\det\Gamma,\tag{1}$$

следующее из неравенства

$$a_1b_2+a_2b_1-a_1a_2-b_1b_2=(a_1-b_1)(b_2-a_2)\geqslant 0.$$

В работе [3] Авдеевой и Быковским был доказан аналог неравенства (1) для базисов Минковского (трехмерных аналогов базисов Вороного). Ниже предлагается более простое и короткое доказательство теоремы Авдеевой и Быковского. Кроме того их результат распространяется на произвольные минимальные системы из трех векторов (см. определения ниже).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00628-а), программы "Ведущие научные школы" (грант № НШ-1922.2012.1) и фонда «Династия».

DOI: 10.4213/mzm10110

2. Минимальные системы и базисы Минковского. Для непустого точечного множества $T \subset \mathbb{R}^3$ положим

$$|T|_i = \max\{|x_i| : x = (x_1, x_2, x_3) \in T\}, \qquad i = 1, 2, 3,$$
$$\Pi(T) = [-|T|_1, |T|_1] \times [-|T|_2, |T|_2] \times [-|T|_3, |T|_3].$$

Пусть Γ – полная решетка в $\mathbb{R}^3$. *Системой узлов порядка* t решетки Γ назовем любой конечный набор ненулевых узлов Γ вида $(\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t)})$, где $\gamma^{(i)} \neq \pm\gamma^{(j)}$, $1 \leqslant i < j \leqslant t$. Система S решетки Γ называется *минимальной*, если не существует ненулевых узлов $\gamma \in \Gamma$, лежащих строго внутри $\Pi(S)$.

Минковским доказано (см. [6], [7; статья 109]), что всякая минимальная система из трех векторов $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)})$ либо вырождена (и тогда для некоторой комбинации знаков $\gamma^{(1)} \pm \gamma^{(2)} \pm \gamma^{(3)} = 0$), либо образует базис решетки (*базис Минковского*). С помощью элементарных преобразований матрица любого базиса Минковского может быть приведена к одной из двух канонических форм (см. [6], [7], а также [8]–[10])

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ -a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

с неотрицательными a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющими условиям:

1) $\max\{b_1, c_1\} \leqslant a_1$, $\max\{a_2, c_2\} \leqslant b_2$, $\max\{a_3, b_3\} \leqslant c_3$;
2) для матриц первого типа выполняется по крайней мере одно из неравенств $c_1 \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant c_2$, $b_3 \leqslant c_3$;
3) для матриц второго типа выполняются неравенство $a_2 + c_2 \geqslant b_2$ и по крайней мере одно из неравенств $a_3 \leqslant b_3$, $c_1 \leqslant b_1$.

При этом за счет переобозначения координат и векторов можно добиться того, чтобы из трех (для матриц первого типа) или двух (для матриц второго типа) альтернативных неравенств выполнялось неравенство $c_1 \leqslant b_1$.

3. Трехмерная теорема Валена. Предыдущие результаты, связанные с трехмерной теоремой Валена, а также некоторые ее уточнения могут быть найдены в [10]–[12].

Теорема 1 (Авдеева, Быковский, 2006). *Пусть узлы $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ составляют базис Минковского рещетки Γ. Тогда*

$$|\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}\gamma_3^{(1)}| + |\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}\gamma_3^{(2)}| + |\gamma_1^{(3)}\gamma_2^{(3)}\gamma_3^{(3)}| \leqslant \det\Gamma. \tag{3}$$

Доказательство. Для матрицы M, столбцами которой являются векторы $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$, докажем, что $\Delta(M) \geqslant 0$, где

$$\Delta(M) = \det M - |\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}\gamma_3^{(1)}| - |\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}\gamma_3^{(2)}| - |\gamma_1^{(3)}\gamma_2^{(3)}\gamma_3^{(3)}|.$$

Под действием преобразований из группы G_3 величина $\Delta(M)$ не меняется. Поэтому оценку $\Delta(M) \geqslant 0$ достаточно доказать для базисов, матрицы которых имеют вид (2) и удовлетворяют неравенству $c_1 \leqslant b_1 \leqslant a_1$.

Так как $b_2c_3 \geqslant a_2a_3$, то коэффициент при a_1 в разложении ($\varepsilon = -1$ для матриц первого типа и $\varepsilon = 1$ для матриц второго типа)

$$\Delta(M) = a_1(b_2c_3 + c_2b_3 - a_2a_3) + b_1(a_2c_3 + c_2a_3 - b_2b_3) + \varepsilon c_1(a_2b_3 - b_2a_3) - c_1c_2c_3,$$

неотрицателен, поэтому неравенство $\Delta(M) \geqslant 0$ достаточно проверить при $a_1 = b_1$. В этом случае

$$\Delta(M) = b_1(b_2(c_3 - b_3) + a_2(c_3 - a_3) + c_2(a_3 + b_3)) + \varepsilon c_1(a_2b_3 - b_2a_3) - c_1c_2c_3,$$

и коэффициент при b_1 неотрицателен. Значит, достаточно ограничиться случаем, когда $a_1 = b_1 = c_1$. Для матриц первого типа ($\varepsilon = -1$) и

$$\Delta(M) = c_1(a_3(b_2 - a_2) + a_2(c_3 - b_3) + (b_2 - c_2)(c_3 - b_3) + a_3c_2) \geqslant 0,$$

поскольку все слагаемые неотрицательны. Для матриц второго типа ($\varepsilon = 1$) и

$$\Delta(M) = c_1((b_2 - c_2)(c_3 - a_3) + a_2(c_3 - a_3) + b_3(a_2 + c_2 - b_2)) \geqslant 0,$$

поскольку выполняется дополнительное условие $a_2 + c_2 \geqslant b_2$.

4. Обобщение трехмерной теоремы Валена. Результат теоремы 1 допускает следующее уточнение.

Теорема 2. *Неравенство* (3) *выполняется для произвольной минимальной системы из трех векторов* $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$.

Доказательство. Учитывая теорему 1, доказательство достаточно провести для вырожденной минимальной тройки. Предположим, что $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)})$ – вырожденная система из трех векторов, а их знаки выбраны так, что $\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} + \gamma^{(3)} = 0$. Тогда матрица вырожденной минимальной тройки путем элементарных преобразований может быть приведена к виду (см. [7; статья 109])

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & b_2 & -c_2 \\ -a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + c_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & a_2 + c_2 & -c_2 \\ -a_3 & -b_3 & a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

с неотрицательными a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, 3$. Параллелепипед $[-a_1, a_1] \times [-b_2, b_2] \times [-c_3, c_3]$ не содержит внутри себя точек решетки Γ, отличных от начала координат. По теореме Минковского о выпуклом теле $\det \Gamma \geqslant a_1b_2c_3$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}\gamma_3^{(1)}| + |\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}\gamma_3^{(2)}| + |\gamma_1^{(3)}\gamma_2^{(3)}\gamma_3^{(3)}| &= (b_1 + c_1)a_2a_3 + (a_2 + c_2)b_1b_3 + (a_3 + b_3)c_1c_2 \\ &\leqslant (b_1 + c_1)(a_2 + c_2)(a_3 + b_3) = a_1b_2c_3 \leqslant \det \Gamma. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. В. Устинов, *Математика и информатика*, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 103–128. **[2]** Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, Т. 1, Изд-во АН УССР, Киев, 1952. **[3]** М. О. Авдеева,В. А. Быковский, *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 163–168. **[4]** K. Th. Vahlen, *J. für Math.*, **115**:3 (1895), 221–233. **[5]** А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Наука, М., 1978. **[6]** H. Minkowski, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **13** (1896), 41–60. **[7]** H. Hancock, *Development of the Minkowski Geometry of Numbers*, Vol. 1, 2, Dover Publ., 1964. **[8]** О. А. Горкуша, *Матем. заметки*, **69**:3 (2001), 353–362. **[9]** В. А. Быковский, О. А. Горкуша, *Матем. сб.*, **192**:2 (2001), 57–66. **[10]** М. О. Авдеева, В. А. Быковский, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 3–14. **[11]** В. А. Быковский, *Матем. заметки*, **66**:1 (1999), 20–29. **[12]** С. Гассан, *Чебышевский сб.*, **6**:3 (2005), 51–84.

А. В. Устинов
Хабаровское отделение
Института прикладной математики ДВО РАН
E-mail: ustinov.alexey@gmail.com

Поступило
08.08.2012
Исправленный вариант
31.07.2013