В. И. Берник, А. В. Устинов, О распределении точек модулярной гиперболы, *Дальневост. матем. журн.*, 2014, том 14, номер 2, 141–155

Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 141–155

УДК 511.336, 511.335
MSC2010 11L05, 11D45

© В. И. Берник, А. В. Устинов[1]

О распределении точек модулярной гиперболы

В статье доказываются варианты известных теорем о равномерном распределении решений детерминантного уравнения $\left|\begin{smallmatrix} a & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right| = q$ при условии, что переменные удовлетворяют дополнительным условиям $(a, x) = 1$ или $(a, x, y, z) = 1$.

Ключевые слова: *суммы Клостермана, модулярная гипербола.*

1. Введение

В работе [2] Линник и Скубенко доказали равномерную распределённость по мере Хаара целочисленных решений уравнения $\det X = P$, где X — матрица 3×3 с независимыми коэффициентами и $P \to \infty$. Их метод был основан на редукции задачи к предыдущей размерности — детерминантному уравнению

$$\det \begin{pmatrix} a & x \\ y & z \end{pmatrix} = q. \tag{1}$$

При более детальном изучении редукции Линника — Скубенко, см. [5], возникает необходимость в исследовании решений уравнения (1), когда $a \neq 0$ фиксировано, а на переменные x, y, z дополнительно накладываются требования арифметического характера. В настоящей статье доказываются варианты уже известных теорем о равномерном распределении решений детерминантного уравнения (1), удовлетворяющих условиям $(a, x) = 1$ или $(a, x, y, z) = 1$.

2. Четыре варианта сумм Клостермана

Уравнение (1) можно заменить эквивалентным сравнением

$$xy + q \equiv 0 \pmod a, \tag{2}$$

[1]Институт математики НАН Беларуси, 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11; Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: `bernik@im.bas-net.by, ustinov@iam.khv.ru`

предполагая, что $a>0$ фиксировано, а значение z находится из равенства $z=(xy+q)a^{-1}$. За распределение решений уравнения (1) (точек модулярной гиперболы, задаваемой сравнением (2)) отвечают тригонометрические суммы

$$K_a(m,n,q)=\sum_{x,y=1}^{a}\delta_a(xy+q)e\left(\frac{mx+ny}{a}\right), \tag{3}$$

где $e(t)=e^{2\pi\sqrt{-1}t}$ и δ_q — характеристическая функция делимости на q:

$$\delta_q(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\equiv 0 \pmod q,\\ 0, & \text{если } x\not\equiv 0 \pmod q.\end{cases}$$

Суммы (3) при $q=-1$ совпадают с классическими суммами Клостермана

$$K_q(m,n)=\sum_{x,y=1}^{q}\delta_q(xy-1)e\left(\frac{mx+ny}{q}\right),$$

и равномерность распределения решений сравнения (2) вытекает из наличия нетривиальных оценок сумм Клостермана. Это наблюдение, в частности, позволяет находить асимптотические формулы для сумм вида

$$\sum_{a_1b_2-a_2b_1=P}f(a_1,a_2,b_1,b_2),$$

к которым сводятся задачи из геометрии чисел, теории цепных дробей и др., см. обзор [9].

Для сумм Клостермана (2) известна оценка

$$|K_a(m,n)|\leq\tau(a)(m,n,a)^{1/2}a^{1/2} \tag{4}$$

($\tau(q)$ — число делителей q), которая для простых a была доказана А. Вейлем (см. [10]), а на случай произвольных a распространена Эстерманом (см. [7]).

Суммы Рамануджана

$$c_a(n)=\sum_{x=1}^{a}{}^{*}\,e\left(\frac{nx}{a}\right)$$

(здесь и далее знак звёздочки означает, что суммирование ограничено на приведённую систему вычетов) являются частными случаями сумм Клостермана

$$K_a(n,0)=K_a(0,n)=c_a(n)$$

и допускают более точную оценку (см. [8, теорема 272])

$$|c_a(n)|\leq(a,n). \tag{5}$$

Суммы (3) являются симметрическими функциями от переменных m, n, q, что следует из равенства

$$K_a(m,n,q)=\frac{1}{a}\sum_{x,y,z=1}^{a}e\left(\frac{xyz+mx+ny+qz}{a}\right).$$

Правильные по порядку оценки сумм $K_a(m,n,q)$ следуют из неравенства (4) и тождества

$$K_a(m,n,q) = \sum_{d|(m,n,a)} dK_{a/d}\left(-\frac{mn}{d^2}, q\right)$$

(обсуждение истории этого тождества см. в [6]; его короткое доказательство может быть найдено в [1, § 3]). В приложениях удобно использовать явную оценку (см. [3, лемма 1])

$$|K_a(m,n,q)| \ll \tau(a)\tau((m,n,q,a))(mn,mq,nq,a)^{1/2}a^{1/2}, \tag{6}$$

которая превращается в неравенство (4) при $q=-1$.

При наложении дополнительных условий $(a,x,y,z)=1$ или $(a,x)=1$ возникает необходимость в рассмотрении следующих тригонометрических сумм:

$$\begin{aligned} K_a^{\times}(m,n,q) &= \sum_{x,y=1}^{a}\sum_{z}[az-xy=q,(a,x,y,z)=1]e\left(\frac{mx+ny}{a}\right), \\ K_a^{*}(m,n,q) &= {\sum_{x=1}^{a}}^{*}\sum_{y=1}^{a}\delta_a(xy+q)e\left(\frac{mx+ny}{a}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь и ниже через $[A]$ будет обозначаться характеристическая функция множества, задаваемого условием A: $[A]=1$, если условие выполнено, и $[A]=0$ в противном случае.

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} K_a^{\times}(m,n,q) &= \sum_{d|a,d^2|q}\mu(d)K_{a/d}\left(m,n,\frac{q}{d^2}\right), \\ K_a^{*}(m,n,q) &= \sum_{d|(a,q,n)}\mu(d)dK_{a/d}\left(m,\frac{n}{d},\frac{q}{d}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Для доказательства первого тождества достаточно избавиться от условия взаимной простоты с помощью функции Мёбиуса:

$$\begin{aligned} K_a^{\times}(m,n,q) &= \sum_{x,y=1}^{a}\sum_{z}[az-xy=q]e\left(\frac{mx+ny}{a}\right)\sum_{d|(a,x,y,z)}\mu(d) \\ &= \sum_{d|a,d^2|q}\mu(d)\sum_{x_1,y_1=1}^{a/d}\sum_{z_1}\left[\frac{a}{d}z_1-x_1y_1=\frac{q}{d^2}\right]e\left(\frac{mx_1+ny_1}{a/d}\right) \\ &= \sum_{d|a,d^2|q}\mu(d)K_{a/d}\left(m,n,\frac{q}{d^2}\right). \end{aligned}$$

Сумму $K_a^*(m,n,q)$ преобразуем так же:

$$K_a^*(m,n,q) = \sum_{d|a} \mu(d) \sum_{\substack{x=1\\ d|x}}^{a} \sum_{y=1}^{a} \delta_a(xy+q) e\left(\frac{mx+ny}{a}\right)$$
$$= \sum_{d|a} \mu(d) \sum_{x_1=1}^{a/d} \sum_{y=1}^{a} \delta_a(dx_1 y+q) e\left(\frac{mdx_1+ny}{a}\right).$$

В ненулевых слагаемых $\delta_a(dx_1 v+q) \neq 0$, то есть $d \mid q$. Поэтому

$$K_a^*(m,n,q) = \sum_{d|(a,q)} \mu(d) \sum_{x_1=1}^{a/d} \sum_{y=1}^{a} \delta_{a/d}(x_1 y+q/d) e\left(\frac{mdx_1+ny}{a}\right)$$
$$= \sum_{d|(a,q)} \mu(d) d\delta_d(n) \sum_{x_1,y_1=1}^{a/d} \delta_{a/d}(x_1 y_1+q/d) e\left(\frac{mx_1+nd^{-1}y_1}{a/d}\right)$$
$$= \sum_{d|(a,q,n)} \mu(d) d K_{a/d}\left(m, \frac{n}{d}, \frac{q}{d}\right).$$

□

Для краткости будем использовать следующие обозначения:

$$K_a(q) = K_a(0,0,q), \qquad K_a^\times(q) = K_a^\times(0,0,q).$$

Величина $K_a^*(0,0,q) = \varphi(a)$ в дополнительном обозначении не нуждается. Решения сравнения (2) будем называть решениями 1, 2 или 3 типа, если соответственно

1) на решения не наложено никаких дополнительных условий;
2) решения удовлетворяют условию $(a,x,y,z)=1$;
3) решения удовлетворяют условию $(a,x)=1$.

Три отношения

$$\frac{K_a(q)}{a^2}, \quad \frac{K_a^\times(q)}{a^2}, \quad \frac{\varphi(a)}{a^2},$$

представляют собой плотности распределения решений 1, 2 или 3 типа.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$K_a(q) = a \sum_{k|(a,q)} \sum_{d|a/k} \frac{\mu(d)}{d}, \tag{9}$$
$$K_a^\times(q) = \sum_{d|a,\, d^2|q} \mu(d) K_{a/d}(q/d^2). \tag{10}$$

Доказательство. При фиксированном значении x сравнение $xy+q \equiv 0 \pmod a$ разрешимо, только если $(x,a) \mid q$. В этом случае существует (a,x) решений относительно неизвестной y, лежащей в пределах $1 \le y \le a$. Значит, по определению

$K_a(q)$

$$K_a(q) = \sum_{x=1}^{a} (a,x)\delta_{(a,x)}(q) = \sum_{k|(a,q)} k \sum_{\substack{x=1\\(a,x)=k}}^{a} 1 = \sum_{k|(a,q)} k\varphi(a/k) = a\sum_{k|(a,q)}\sum_{d|a/k}\frac{\mu(d)}{d}.$$

Вторая формула является непосредственным следствием равенства (8). □

Следствие 1. *Справедливы оценки*

$$K_a(q) \ll a^{1+\varepsilon}, \qquad K_a^{\times}(q) \ll a^{1+\varepsilon}.$$

Лемма 3. *Суммы $K_a^*(m,n,q)$ удовлетворяют оценкам*

$$|K_a^*(0,n,q)| \le (a,nq), \tag{11}$$

$$|K_a^*(m,0,q)| \le (a,m), \tag{12}$$

$$|K_a^*(m,n,q)| \ll (mn,mq,nq,a)^{1/2} a^{1/2+\varepsilon}.$$

Доказательство. Если $m=0$ или $n=0$, то сумма $K_a^*(m,n,q)$ становится суммой Рамануджана, поэтому неравенства (11)–(12) следуют из оценки (5):

$$K_a^*(0,n,q) = \sum_{x=1}^{a}{}^{*} \sum_{y=1}^{a} \delta_a(y+qx^{-1}) e\left(\frac{ny}{a}\right) = \sum_{x=1}^{a}{}^{*} e\left(-\frac{nqx^{-1}}{a}\right) = c_a(nq),$$

$$K_a^*(m,0,q) = \sum_{x=1}^{a}{}^{*} \sum_{y=1}^{a} \delta_a(y+qx^{-1}) e\left(\frac{mx}{a}\right) = \sum_{x=1}^{a}{}^{*} e\left(-\frac{mx}{a}\right) = c_a(m).$$

В общем же случае оценка $K_a^*(m,n,q)$ сводится к оценке (6) с помощью леммы 1:

$$|K_a^*(m,n,q)| \le \sum_{d|(a,q,n)} d\left(\frac{mn}{d},\frac{mq}{d},\frac{nq}{d^2},\frac{a}{d}\right)^{1/2}\left(\frac{a}{d}\right)^{1/2+\varepsilon} \ll (mn,mq,nq,a)^{1/2}a^{1/2+\varepsilon}.$$

□

3. Распределение решений 1 и 2 типа

Теорема 1. *Пусть a — натуральное, q — целое и $I = [Y_1, Y_1+Z_1)\times[Y_2, Y_2+Z_2)$, где Z_1, $Z_2 > 0$. Тогда для суммы*

$$\Phi_{a,q}(I) = \sum_{(x,y)\in I} \delta_a(xy+q)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_{a,q}(I) = \frac{K_a(q)}{a^2}\cdot Z_1Z_2 + O\left(R(Z_1,Z_2)\right), \tag{13}$$

где

$$R(Z_1,Z_2) = a^{1/2+\varepsilon} + \left(\frac{Z_1}{a}+\frac{Z_2}{a}+1\right)(a,q)a^{\varepsilon}. \tag{14}$$

Доказательство. Разобьем область изменения параметров b и c горизонтальными и вертикальными прямыми вида $b = ja$, $c = ja$ $(j \in \mathbb{Z})$ на квадраты размером $a \times a$ и прямоугольники, стороны которых не превосходят a. По определению суммы $K_a(m, n, q)$ при $Z_1 = Z_2 = a$ асимптотическая формула (13) верна с нулевым остаточным членом. Для прямоугольника со сторонами $Z_1 = a$, $C < a$ формула (13) справедлива с остатком $O((a,q)a^{\varepsilon})$ (см. [4, лемма 5]). Число таких прямоугольников есть $O((Z_1 + Z_2)/a)$. Для угловых прямоугольников (их не больше четырёх) Z_1, $Z_2 < a$ и формула (13) верна с остатком (см. [3, лемма 3]) $O(a^{1/2+\varepsilon} + (a,q)a^{\varepsilon})$. Суммируя асимптотические формулы для всех частей разбиения, получаем требуемое равенство. □

Равномерность распределения решений 2 типа можно свести к теореме 1 без доказательства оценки суммы $K_a^{\times}(m, n, q)$.

Теорема 2. *Пусть a — натуральное, q — целое, $I = [Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2)$, где Z_1, $Z_2 > 0$ и*

$$\Phi_{a,q}^{\times}(I) = \sum_{(x,y)\in I} \sum_{z} [az - xy = q, (a, x, y, z) = 1].$$

Тогда

$$\Phi_{a,q}^{\times}(I) = \frac{K_a^{\times}(q)}{a^2} \cdot Z_1 Z_2 + O\left(R(Z_1, Z_2)\right),$$

где $R(Z_1, Z_2)$ определено равенством (14).

Доказательство. Выразим $\Phi_{a,q}^{\times}(I)$ через $\Phi_{a,q}(I)$ с помощью функции Мёбиуса:

$$\begin{aligned}
\Phi_{a,q}^{\times}(I) &= \sum_{(x,y)\in I} \sum_{z=-\infty}^{\infty} [az - xy = q] \sum_{d|(a,x,y,z)} \mu(d) \\
&= \sum_{d|a,d^2|q} \mu(d) \sum_{(x_1,y_1)\in I/d} \sum_{z_1} \left[\frac{a}{d} z_1 - x_1 y_1 = \frac{q}{d^2}\right] \\
&= \sum_{d|a,d^2|q} \mu(d) \Phi_{a/d,q/d^2}\left(I/d\right).
\end{aligned}$$

Подставляя в последнее равенство асимптотическую формулу для $\Phi_{a,q}$ из теоремы 1, приходим к нужной формуле. □

4. Распределение решений 3 типа

Если $(x, a) = 1$, то каждый интервал $[Y, Y + a)$ содержит ровно одно решение сравнения $xy + q \equiv 0 \pmod{a}$ относительно неизвестной y. Поэтому для произвольной функции G, определённой на прямоугольнике $[Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2)$, естественной аппроксимацией для суммы

$$\Phi_{a,q}^{*}[G] = \sideset{}{^*}\sum_{Y_1 \le x < Y_1 + Z_1} \sum_{Y_2 \le y < Y_2 + Z_2} \delta_a(xy + q) G(x, y)$$

является сумма

$$S_a^*[G]=\frac{1}{a}\sideset{}{^*}\sum_{Y_1\le x<Y_1+Z_1}\int\limits_{Y_2}^{Y_2+Z_2}G(x,y)dy.$$

Получим оценку разности $\Phi_{a,q}^*[G]-S_a^*[G]$, применимую для широкого класса функций G. Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений. Под нормой функции всегда будем понимать L^∞-норму.

Лемма 4. *Пусть a, D — натуральные числа и $D\mid a$. Предположим, что функция f на интервале I имеет конечное число участков монотонности. Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\sum_{\substack{x\in I\\ x\equiv x_0\pmod{*}D}}f(x)=\frac{1}{D}\int\limits_I f(x)dx+O(\|f\|),\tag{15}$$

$$\sum_{\substack{x\in I\\ (x,a)=D}}f(x)=\frac{\varphi(a/D)}{a}\int\limits_I f(x)dx+O(\|f\|a^\varepsilon),\tag{16}$$

$$\sum_{\substack{x\in I\\ (x,a)=1}}f(x)=\frac{\varphi(a)}{a}\int\limits_I f(x)dx+O(\|f\|a^\varepsilon).\tag{17}$$

Доказательство. Так как число участков монотонности функции f конечно, то утверждение леммы достаточно проверить в предположении, что f — монотонная функция. В этом случае равенство (15) получается с помощью стандартной аппроксимации f ступенчатыми функциями, а равенство (16) сводится к (15):

$$\sum_{\substack{x\in I\\ (x,a)=D}}f(x)=\sum_{\substack{x\in I\\ D|x,(x/D,a/D)=1}}f(x)=\sum_{\delta|a/D}\mu(\delta)\sum_{\substack{x\in I\\ x\equiv 0\pmod{*}\delta D}}f(x)$$

$$=\sum_{\delta|a/D}\mu(\delta)\left(\frac{1}{\delta D}\int_I f(x)dx+O(\|f\|)\right)=\frac{\varphi(a/D)}{a}\int\limits_I f(x)dx+O(\|f\|a^\varepsilon).$$

Третье равенство является частным случаем второго. □

4.1. Решения 3 типа в прямоугольнике

Лемма 5. *Пусть $Z\ge 1$ и G — характеристическая функция прямоугольника $I=[0,a)\times[0,Z)$. Тогда*

$$\Phi_{a,q}^*[G]=S_a^*[G]+O(a^\varepsilon).$$

Доказательство. Преобразуем сумму $\Phi_{a,q}^*[G]$:

$$\Phi_{a,q}^*[G]=\sum_{d|a}\mu(d)\sum_{\substack{x=1\\ d|x}}^{a}\sum_{0<y\le Z}\delta_a(xy+q)=\sum_{d|a}\mu(d)\sum_{x_1=1}^{a/d}\sum_{0<y\le Z}\delta_{a/d}\left(x_1y+\frac{q}{d}\right)$$

$$=\sum_{d|(a,q)}\mu(d)\sum_{0<y\le Z}\left(\frac{a}{d},y\right)\delta_{a/d}\left(\frac{q}{d}\right).$$

Положим $k = (a/d, y)$. Тогда

$$\Phi^*_{a,q}[G] = \sum_{kd|(a,q)} k\mu(d) \sum_{\substack{0<y\le Z\\ (a/d,y)=k}} 1 = \sum_{kd|(a,q)} k\mu(d) \sum_{\substack{0<y_1\le Z/k\\ (a/(dk),y_1)=1}} 1.$$

Применяя равенство (17) и вводя переменную $D = kd$, находим, что

$$\begin{aligned}\Phi^*_{a,q}[G] &= \sum_{kd|(a,q)} k\mu(d) \cdot \frac{\varphi\left(\frac{a}{dk}\right)}{\frac{a}{dk}} \cdot \frac{Z}{k} + O(a^\varepsilon)\\ &= Z \sum_{D|(a,q)} \sum_{d|D} \mu(d) \sum_{m|a/D} \frac{\mu(m)}{m} + O(a^\varepsilon)\\ &= Z \sum_{m|a} \frac{\mu(m)}{m} + O(a^\varepsilon) = \frac{\varphi(a)}{a} Z + O(a^\varepsilon) = S^*_a[G] + O(a^\varepsilon).\end{aligned}$$

□

Теорема 3. *Пусть* Z_1, $Z_2 \ge 1$ *и* F *— характеристическая функция прямоугольника* $I = [Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2)$. *Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\Phi^*_{a,q}[F] = S^*_a[F] + O\left((a,q)(a^{1/2} + Z_1 a^{-1})a^\varepsilon\right). \tag{18}$$

Замечание 1. Как и для решений 2 типа, доказательство равномерной распределённости решений 3 типа можно свести к теореме 1. Однако это приводит к остаточному члену вида $O\left((a,q)(a^{1/2} + (Z_1 + Z_2)a^{-1})a^\varepsilon\right)$. Важным отличием теоремы 3 от теорем 1 и 2 является отсутствие параметра Z_2 в остаточном члене. Поэтому теорему 3 докажем непосредственно.

Доказательство теоремы 3. Если $Z_2 = ka$, где k — натуральное, то $\Phi^*_{a,q}[F] = S^*_a[F]$. Поэтому утверждение леммы достаточно доказать, предполагая, что $Y_2 = 0$, $Z_2 < a$. Из леммы 5 следует, что равенство (18) достаточно проверить при $0 \le Y_1 < Y_1 + Z_1 < a$. Согласно равенству (17), для этого достаточно проверить, что

$$\Phi^*_{a,q}[F] = \frac{\varphi(a)}{a^2} Z_1 Z_2 + O\left((a,q)a^{1/2+\varepsilon}\right). \tag{19}$$

Представим F в виде конечного ряда Фурье

$$F(x,y) = \sum_{a/2<m,n\le a/2} \widehat{F}(m,n) e\left(\frac{mx+ny}{a}\right)$$

с коэффициентами

$$\widehat{F}(m,n) = \frac{1}{a^2} \sum_{0\le x,y<a} F(x,y) e\left(-\frac{mx+ny}{a}\right).$$

Тогда сумму $\Phi^*_{a,q}[F]$ можно записать в виде

$$\Phi^*_{a,q}[F] = \sum_{x=1}^{a}{}^{*} \sum_{y=1}^{a} F(x,y)\delta_a(xy+q) = \sum_{a/2<m,n\le a/2} \widehat{F}(m,n)K^*_a(m,n,q),$$

где сумма $K^*_a(m,n,q)$ определена равенством (7). Выделяя слагаемое с $m=n=0$ и пользуясь соотношениями $K^*_a(q)=\varphi(a)$,

$$\widehat{F}(0,0) = \frac{Z_1Z_2}{a^2} + O\left(\frac{1}{a}\right),$$

$$|\widehat{F}(m,n)| \le \min\left\{\frac{Z_1}{a}, \frac{1}{|m|}\right\} \min\left\{\frac{Z_2}{a}, \frac{1}{|n|}\right\}, \qquad |m|,|n|\le a/2, (m,n)\ne(0,0),$$

находим, что

$$\Phi^*_{a,q}[F] = \frac{\varphi(a)}{a^2} Z_1Z_2 + O(R_1+R_2+R_3+1), \tag{20}$$

где

$$R_1 = \frac{Z_1}{a}\sum_{n=1}^{a}\frac{1}{n}|K^*_a(0,n,q)|, \quad R_2 = \frac{Z_2}{a}\sum_{m=1}^{a}\frac{1}{m}|K^*_a(m,0,q)|,$$

$$R_3 = \sum_{m,n=1}^{a}\frac{1}{mn}|K^*_a(m,n,q)|.$$

По лемме 3

$$R_1 \le \frac{Z_1}{a}\sum_{n=1}^{a}\frac{(a,nq)}{n} \le \frac{Z_1}{a}\sum_{d|a} d \sum_{\substack{n=1\\ d|nq}}^{a}\frac{1}{n} \le \frac{Z_1}{a}\log a \sum_{d|a} d\frac{(d,q)}{d} \ll (a,q)a^{\varepsilon},$$

$$R_2 \le \frac{Z_2}{a}\sum_{m=1}^{a}\frac{(a,m)}{m} \le \frac{Z_2}{a}\sum_{d|a} d \sum_{\substack{m=1\\ d|m}}^{a}\frac{1}{m} \ll a^{\varepsilon},$$

$$R_3 \ll a^{1/2+\varepsilon}\sum_{m,n=1}^{a}\frac{(mn,mq,nq,a)^{1/2}}{mn} \ll a^{1/2+\varepsilon}.$$

При оценке остатка R_3 была использована лемма 3 из работы [3]. Подставляя полученные оценки остатков R_1, R_2, R_3 в формулу (20), приходим к нужному равенству (19). □

Разность $\Phi^*_{a,q}[F] - S^*_a[F]$ допускает также более простую оценку.

Лемма 6. *Пусть Z_1, $Z_2\ge 1$, и F — характеристическая функция прямоугольника $I=[Y_1,Y_1+Z_1)\times[Y_2,Y_2+Z_2)$. Тогда*

$$\Phi^*_{a,q}[F] = S^*_a[F] + O(Z_2) + O(Z_1a^{-1+\varepsilon}). \tag{21}$$

Доказательство. Из леммы 5 следует, что равенство (21) достаточно проверить при $0 \le Y_1 < Y_1 + Z_1 < a$. В этом случае утверждение леммы вытекает из оценок

$$S_a^*[F] = O\left(Z_2\right), \quad \Phi_{a,q}^*[F] = O\left(Z_2\right). \tag{22}$$

Первая из них тривиальна. Для доказательства второй оценки положим $\Delta = (a, q)$, $a = \Delta a_1$, $q = \Delta q_1$. Тогда

$$\Phi_{a,q}^*[F] \le \sum_{x=1}^{a}{}^{*} \sum_{0<y\le Z_2} \delta_a(y - qx^{-1}) = \sum_{\substack{0<y\le Z_2\\ \Delta|y}} \sum_{x=1}^{a}{}^{*} \delta_{a_1}(y\Delta^{-1} - q_1x^{-1})$$
$$\le \sum_{\substack{0<y\le Z_2\\ \Delta|y}} \Delta \sum_{x=1}^{a_1}{}^{*} \delta_{a_1}(y\Delta^{-1} - q_1x^{-1}) = \sum_{\substack{0<y\le Z_2\\ \Delta|y}} \Delta \le Z_2.$$

□

4.2. Решения 3 типа под графиком монотонной функции

Лемма 7. *Пусть f — неотрицательная, невозрастающая на интервале $I = [Y_1, Y_1 + Z_1) \subset [0, a]$ функция, $Z_2 = f(0)$, $Z_1 Z_2 \ge a^{3/2}$ и G — характеристическая функция области под графиком функции f:*

$$G(x, y) = [x \in I, 0 \le y \le f(x)]. \tag{23}$$

Тогда

$$\Phi_{a,q}^*[G] = S_a^*[G] + O((a, q) Z_1^{1/2} Z_2^{1/2} a^{-1/4+\varepsilon}).$$

Замечание 2. Очевидно, что лемма 7 остаётся справедливой и для функций, имеющих на интервале I конечное число участков монотонности.

Доказательство. Разобьём интервал I, внутри которого меняется переменная x точками $x_j = Y_1 + \frac{j}{r} Z_1$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ на r равных интервалов. Тогда

$$\Phi_{a,q}^*[G] = \sum_{j=1}^{r} \Phi_j,$$

где

$$\Phi_j = \sum_{x_{j-1}<x\le x_j}{}^{*} \sum_{0\le y\le f(x)} \delta_a(xy + q).$$

В силу монотонности функции f

$$\sum_{x_{j-1}<x\le x_j}{}^{*} \sum_{1\le y\le f(x_j)} \delta_a(xy + q) \le \Phi_j \le \sum_{x_{j-1}<x\le x_j}{}^{*} \sum_{1\le y\le f(x_{j-1})} \delta_a(xy + q).$$

Применяя к суммам, стоящим в последней формуле, теорему 3, получаем неравенства

$$\frac{1}{a} \sum_{x_{j-1}<x\le x_j}{}^{*} f(x_j) + O\left(R\right) \le \Phi_j \le \frac{1}{a} \sum_{x_{j-1}<x\le x_j}{}^{*} f(x_{j-1}) + O\left(R\right), \tag{24}$$

где $R=(a,q)a^{1/2+\varepsilon}$. Так как

$$\frac{1}{a}\sum_{x_{j-1}<x\le x_j}^{*} f(x_j)=\frac{1}{a}\sum_{x_{j-1}<x\le x_j}^{*} f(x)+O\left(\frac{Z_1(f(x_{j-1})-f(x_j))}{ra}\right),$$
$$\frac{1}{a}\sum_{x_{j-1}<x\le x_j}^{*} f(x_{j-1})=\frac{1}{a}\sum_{x_{j-1}<x\le x_j}^{*} f(x)+O\left(\frac{Z_1(f(x_{j-1})-f(x_j))}{ra}\right),$$

то после суммирования равенства (24) по j от 1 до r находим, что

$$\Phi^*_{a,q}[G]=S^*_a[G]+O\left(\frac{Z_1Z_2}{ra}+(a,q)ra^{1/2+\varepsilon}\right).$$

Выбирая $r=\lfloor Z_1^{1/2}Z_2^{1/2}a^{-3/4}\rfloor$, приходим к утверждению леммы. □

Следствие 2. *Пусть f — неотрицательная, невозрастающая на интервале $I=[Y_1,Y_1+Z_1)\subset[0,a]$ функция, $Z_2=f(0)\ll q/a$ и G определено равенством* (23). *Тогда*

$$\Phi^*_{a,q}[G]=S^*_a[G]+O((a,q)a^{-1/4}q^{1/2+\varepsilon}). \tag{25}$$

Доказательство. При $q\ge a^{3/2}$ равенство (25) непосредственно следует из леммы 7. Если же $q\le a^{3/2}$, то равенство (25) вытекает из леммы 6, поскольку, см. (22),

$$\Phi^*_{a,q}[G]\ll qa^{-1},\quad S^*_a[G]\ll qa^{-1},\quad q^{1/2}a^{-1/4}\gg qa^{-1}.$$

□

Теорема 4. *Пусть G — неотрицательная функция и для любого z в пределах $0\le z\le\|G\|$ неравенство $G(x,y)\le z$ задаёт в прямоугольнике $I=[0,a]\times[0,Z_2]$ ($Z_2\ll q/a$) область $\Omega_z=\{(x,y)\in I: y\le f_z(x)\}$, причём число участков монотонности для всех функций f_z ограничено абсолютной константой. Тогда*

$$\Phi^*_{a,q}[G]-S^*_a[G]\ll\|G\|(a,q)a^{-1/4}q^{1/2+\varepsilon}.$$

Доказательство. Достаточно приблизить $G(x,y)$ линейной комбинацией функций

$$G_k(x,y)=\left[G(x,y)\le\frac{k}{n}\|G\|\right]\qquad(0\le k\le n),$$

к каждой из них применить следствие 2 и устремить n в бесконечность. □

5. Арифметические свойства плотности решений 2 типа

Наряду с функцией Эйлера $\varphi(q)$ будем использовать функции

$$\varphi_+(q)=q\prod_{p|q}\left(1+\frac{1}{p}\right),\quad \varphi_2(q)=\frac{\varphi(q)\varphi_+(q)}{q}=q\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$

Лемма 8. *Справедливы равенства*

$$\sum_{d|a}\frac{\varphi(d)\varphi(a/d)}{d} = \varphi_2(a),$$

$$\sum_{\delta_1\delta_2 k|a}\frac{\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)}{\delta_1^2\delta_2\varphi_+(k\delta_1)} = \frac{\varphi_2(a)}{a}. \tag{26}$$

Доказательство. Проверим первое равенство:

$$\sum_{d|a}\frac{\varphi(d)\varphi(a/d)}{d} = \sum_{d|a}\varphi\left(\frac{a}{d}\right)\sum_{k|d}\frac{\mu(k)}{k} = \sum_{k|a}\frac{\mu(k)}{k}\sum_{d|a,k|d}\varphi\left(\frac{a}{d}\right)$$
$$= \sum_{k|a}\frac{\mu(k)}{k}\sum_{d_1|a/k}\varphi\left(\frac{a}{d_1k}\right) = \sum_{k|a}\frac{\mu(k)}{k}\cdot\frac{a}{k} = \varphi_2(a).$$

Второе равенство сводится к первому ($\Delta = \delta_1 k$):

$$\sum_{\delta_1\delta_2 k|a}\frac{\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)}{\delta_1^2\delta_2\varphi_+(k\delta_1)} = \sum_{\Delta\delta_2|a}\frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2\varphi_+(\Delta)}\sum_{\delta_1|\Delta}\frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1^2}$$
$$= \sum_{\Delta\delta_2|a}\frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2}\cdot\frac{\varphi_2(\Delta)}{\Delta\varphi_+(\Delta)} = \sum_{\Delta\delta_2|a}\frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2}\cdot\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta^2} = \sum_{\Delta|a}\frac{\varphi(a/\Delta)}{a/\Delta}\cdot\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta^2} = \frac{\varphi_2(a)}{a}.$$

□

Лемма 9. *Пусть $Q \geq 2$. Тогда*

$$\sum_{\substack{q\leq Q\\ \Delta|q}}\frac{\varphi(q)}{q^2} = \frac{\log Q}{\zeta(2)\varphi_+(\Delta)} + \psi(\Delta) + O\left(\frac{\log Q}{Q}\right), \tag{27}$$

где

$$\psi(\Delta) = \frac{1}{\Delta}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)(d,\Delta)}{d^2}\left(\log\frac{(d,\Delta)}{d\Delta} + \gamma\right), \tag{28}$$

и γ — постоянная Эйлера.

Доказательство. Преобразуем данную сумму:

$$\sum_{\substack{q\leq Q\\ \Delta|q}}\frac{\varphi(q)}{q^2} = \sum_{\substack{q\leq Q\\ \Delta|q}}\frac{1}{q}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d\leq Q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{\substack{q\leq Q\\ \Delta|q,d|q}}\frac{1}{q} = \sum_{d\leq Q}\frac{\mu(d)(d,\Delta)}{d^2\Delta}\sum_{q\leq\frac{Q(d,\Delta)}{d\Delta}}\frac{1}{q}$$
$$= \frac{1}{\Delta}\sum_{d\leq Q}\frac{\mu(d)(d,\Delta)}{d^2}\left(\log Q + r(d,\Delta) + O\left(\frac{d\Delta}{Q(d,\Delta)}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\Delta}\sum_{d\leq Q}\frac{\mu(d)(d,\Delta)}{d^2}\left(\log Q + r(d,\Delta)\right) + O\left(\frac{\log Q}{Q}\right),$$

где

$$r(d,\Delta) = \log\frac{(d,\Delta)}{d\Delta} + \gamma \ll \log(d\Delta).$$

Поскольку

$$\sum_{d>Q}\frac{(d,\Delta)}{d^2}r(d,\Delta) \ll \sum_{\delta|\Delta}\delta\sum_{d>Q}\frac{\log(d\Delta)}{d^2} \ll \sum_{\delta|\Delta}\frac{\log(Q\Delta)}{Q} \ll \frac{\Delta^{\varepsilon}\log Q}{Q},$$

то ряд (28) корректно определён и

$$\psi(\Delta) - \frac{1}{\Delta}\sum_{d\le Q}\frac{\mu(d)(d,\Delta)}{d^2}r(d\Delta) \ll \frac{\Delta^{-1+\varepsilon}\log Q}{Q} \ll \frac{\log Q}{Q}.$$

Таким же образом проверяется, что

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{d\le Q}\frac{\mu(d)(d,\Delta)}{d^2} \ll \frac{1}{Q}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{q\le Q\\ \Delta|q}}\frac{\varphi(q)}{q^2} &= \frac{\log Q}{\Delta}\sum_{d\le Q}\frac{\mu(d)(d,\Delta)}{d^2} + \psi(\Delta) + O\left(\frac{\log Q}{Q}\right)\\ &= \frac{\log Q}{\Delta}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)(d,\Delta)}{d^2} + \psi(\Delta) + O\left(\frac{\log Q}{Q}\right).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы остаётся проверить равенство

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)(d,\Delta)}{d^2} = \frac{\Delta}{\zeta(2)\varphi_+(\Delta)}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)(d,\Delta)}{d^2} &= \sum_{\delta|\Delta}\delta\sum_{\substack{d=1\\ (d,\Delta)=\delta}}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{\delta|\Delta}\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{d_1=1\\ (d_1,\Delta/\delta)=1}}^{\infty}\frac{\mu(\delta d_1)}{d_1^2}\\ &= \sum_{\delta|\Delta}\frac{\mu(\delta)}{\delta}\sum_{\substack{d_1=1\\ (d_1,\Delta/\delta)=(d_1,\delta)=1}}^{\infty}\frac{\mu(d_1)}{d_1^2} = \sum_{\delta|\Delta}\frac{\mu(\delta)}{\delta}\sum_{\substack{d_1=1\\ (d_1,\Delta)=1}}^{\infty}\frac{\mu(d_1)}{d_1^2}\\ &= \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}\cdot\frac{\prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}{\prod\limits_{p|\Delta}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)} = \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}\cdot\frac{1}{\zeta(2)}\cdot\frac{\Delta}{\varphi_2(\Delta)} = \frac{\Delta}{\zeta(2)\varphi_+(\Delta)}.\end{aligned}$$

□

Теорема 5. *Пусть a — натуральное, $Q \geq 2$ — действительное. Тогда*

$$\sum_{q\leq Q} \frac{\varphi(q)}{q^2} K_a^{\times}(q) = \frac{\log Q}{\zeta(2)} \varphi_2(a) + \omega(a) + O(a^{1+\varepsilon} Q^{-1+\varepsilon}),$$

где $\omega(a)$ — некоторая арифметическая функция от a.

Доказательство. Преобразуем данную сумму, пользуясь равенствами (9) и (10):

$$\begin{aligned}\sum_{q\leq Q} \frac{\varphi(q)}{q^2} K_a^{\times}(q) =& \sum_{q\leq Q} \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{\delta_1|a, \delta_1^2|q} \mu(\delta_1) K_{a/\delta_1}(q/\delta_1^2) \\ =& \sum_{\delta_1|a} \mu(\delta_1) \sum_{q\leq Q, \delta_1^2|q} \frac{\varphi(q)}{q^2} K_{a/\delta_1}(q/\delta_1^2) \\ =& \sum_{\delta_1|a} \mu(\delta_1) \sum_{q\leq Q, \delta_1^2|q} \frac{\varphi(q)}{q^2} \cdot \frac{a}{\delta_1} \sum_{k|\left(\frac{a}{\delta_1}, \frac{q}{\delta_1^2}\right)} \sum_{\delta_2|\frac{a}{\delta_1 k}} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} \\ =& a \sum_{\delta_1\delta_2 k|a} \frac{\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)}{\delta_1\delta_2} \sum_{q\leq Q, \delta_1^2 k|q} \frac{\varphi(q)}{q^2}.\end{aligned}$$

Из равенства (27) следует, что

$$\sum_{q\leq Q} \frac{\varphi(q)}{q^2} K_a^{\times}(q) = a \sum_{\delta_1\delta_2 k|a} \frac{\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)}{\delta_1\delta_2} \left(\frac{\log Q}{\zeta(2)\varphi_+(k\delta_1^2)} + \psi(k\delta_1^2) + O(Q^{-1+\varepsilon}) \right).$$

Применяя формулу (26), приходим к утверждению теоремы. □

Следствие 3. *Пусть $1 \leq Q_1 \leq Q_2$. Тогда*

$$\sum_{Q_1\leq q<Q_2} \frac{\varphi(q)}{q^2} K_a^{\times}(q) = \frac{\varphi_2(a)}{\zeta(2)} \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{dq}{q} + O(a^{1+\varepsilon} Q_1^{-1+\varepsilon}).$$

Список литературы

[1] Виноградов А. И., “Укороченное уравнение для сверток”, Записки научных семинаров ПОМИ, Наука, **211**, 1994, 104–119.

[2] Линник Ю. В., Скубенко Б. Ф., “Асимптотическое распределение целочисленных матриц третьего порядка”, *Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астроном.*, **3**:13 (1964), 25–36.

[3] Устинов А. В., “О числе решений сравнения $xy \equiv \ell \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции”, *Алгебра и анализ*, **20**:5 (2008), 186–216.

[4] Устинов А. В., “Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Мат. сборник*, **200**:4 (2009), 131–160.

[5] Устинов А. В., “О распределении решений детерминантного уравнения”, *Математический сборник* (в печатив печати).

[6] Andersson J., *Summation formulae and zeta functions*, Stockholm University, Faculty of Science, Department of Mathematics, 2006.
[7] Estermann T., “On Kloosterman’s sum”, *Mathematika*, **8** (1961), 83–86.
[8] Hardy G. H., Write E. M., *An Introduction to the Number Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
[9] Shparlinski I. E., “Modular hyperbolas”, *Jpn. J. Math.*, **7** (2012), 235–294.
[10] Weil A., “On some exponential sums”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **34** (1948), 204–207.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 16 сентября 2014 г.

Работа первого автора выполнена при поддержке фонда БРФФИ (грант Ф14Р-034). Работа второго автора выполнена при поддержке фонда «Династия», фонда РФФИ (грант 14-01-90002 Бел_а) и проекта ДВО РАН 12-I-П19-01.

Bernik V. I., Ustinov A. V. On the distribution of points on the modular hyperbola. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 141–155.

ABSTRACT

It is known that solutions of determinant equation $\left|\begin{smallmatrix} a & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right| = q$ are uniformly distributed. The article contains similar results when the variables satisfy additional restrictions $(a, x) = 1$ or $(a, x, y, z) = 1$.
Key words: *Kloosterman sums, modular hyperbola.*