В. И. Берник, А. Г. Гусакова, А. В. Устинов, Распределение алгебраических точек в областях малой меры и вблизи поверхностей, *Чебышевский сб.*, 2015, том 16, выпуск 3, 78–94

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 3 (2015)

УДК 511.42

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧЕК В ОБЛАСТЯХ МАЛОЙ МЕРЫ И ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТЕЙ[1]

В. И. Берник, А. Г. Гусакова (г. Минск, Беларусь),
А. В. Устинов (г. Хабаровск)

Аннотация

Задачи о распределении точек с рациональными координатами явились естественными обобщениями задач о целых точках в выпуклых областях. Оценки сверху и снизу для количества рациональных точек на окружности были использованы в задаче о размерности Хаусдорфа множества точек окружности с заданным порядком приближаемых точками с рациональными координатами. За последние 15 лет в работах М. Хаксли, В. И. Берника, В. В. Бересневича, С. Велани, Р. Вогана были найдены двухсторонние асимптотические оценки для количества рациональных точек вблизи гладких кривых и поверхностей.

Пусть $I = [a, b] \in \mathbb{R}$ – некоторый интервал, $y = f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, которая при $c_2 > c_1 > 0$ удовлетворяет неравенству

$$c_1 < |f''(x)| < c_2$$

для всех $x \in I$. Для произвольного γ, $0 \leq \gamma < 1$ и достаточно большого Q обозначим через $A_I(Q, \gamma)$ множество рациональных точек $\Gamma = \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right)$, $aq \leq p_1 \leq bq$, $1 \leq q \leq Q$, для которых выполняется неравенство

$$\left| f\left(\frac{p_1}{q}\right) - \frac{p_2}{q} \right| < Q^{-1-\gamma}.$$

Множество $A_I(Q, \gamma)$ состоит из точек внутри полосы ширины $2Q^{-\gamma}$ вдоль кривой $y = f(x)$, $x \in I$. Естественно ожидать, что величина $\#A_I(Q, \gamma)$ имеет порядок $Q^{3-\gamma}$, что в конце концов было доказано с использованием методов геометрии чисел и метрической теории диофантовых приближений.

Недавно [1] были получены оценки снизу для количества точек вида $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, где α_1, α_2 — сопряженные действительные алгебраические числа произвольной степени $\deg \alpha_1 = \deg \alpha_2 = n$ и высоты

[1]Работа первого и второго авторов выполнена по гранту БРФФИ Ф14Р-034. Работа третьего автора выполнена по гранту РФФИ 14-01-90002 Бел-а.

$H(\alpha_1) = H(\alpha_2) \leq Q$, в полосе шириной $c(n)Q^{-\gamma}$, $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$, $Q > Q_0(n)$ около любой гладкой кривой $y = f(x)$. В данной работе получены новые результаты о распределении точек с алгебраическими сопряженными действительными и комплексными координатами. В частности, получено обобщение и вышеуказанного результата. Основу доказательства составляет метрическая теорема о диофантовых приближениях в областях G малой меры $\mu G < c_2(n)Q^{-\gamma_1}$, $0 \leq \gamma_1 \leq \frac{1}{3}$.

Ключевые слова: диофантовы приближения, мера Лебега, алгебраические сопряженные числа, высота алгебраического числа.

Библиография: 16 названий.

DISTRIBUTION OF ALGEBRAIC POINTS IN DOMAINS OF SMALL MEASURE AND NEAR THE SURFACES

V. I. Bernik, A. G. Gusakova (Minsk, Belarus),
A. V. Ustinov

Abstract

Some questions about distribution of the points with rational coordinates are natural generalizations of problems about integer points in convex domains. Upper and lower bounds for the quantity of rational points on the circle were used in the study of Hausdorff dimension of the set of the point on circle which are approximated with a given order of accuracy by the points with rational coordinates. During the last 15 years in the papers of M. Huxley, V. I. Bernik, V. V. Beresnevich, S. Velani, R. Vaughan double sided asymptotic estimates for the quantity of rational points near the smooth curves and surfaces were found.

Let $I = [a, b] \in \mathbb{R}$ is an interval, $y = f(x)$ is twice continuously differentiable function which satisfies the inequality

$$c_1 < |f''(x)| < c_2$$

for $c_2 > c_1 > 0$ and for all $x \in I$. For arbitrary γ, $0 \leq \gamma < 1$ for sufficiently large Q we denote by $A_I(Q, \gamma)$ the set of rational points $\Gamma = \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right)$, $aq \leq p_1 \leq bq$, $1 \leq q \leq Q$, for witch the following inequality holds

$$\left| f\left(\frac{p_1}{q}\right) - \frac{p_2}{q} \right| < Q^{-1-\gamma}.$$

The set $A_I(Q, \gamma)$ consists from points lying inside the strip width of $2Q^{-\gamma}$ near the curve $y = f(x)$, $x \in I$. It it natural to expect that $\#A_I(Q, \gamma)$ is a value of the order $Q^{3-\gamma}$. It was proved using the methods of geometry of numbers and metric theory of Diophantine approximations.

Recently [1] new estimates of the quantity of points $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, where α_1, α_2 are conjugate real algebraic numbers of arbitrary degree $\deg \alpha_1 =$

$\deg \alpha_2 = n$ and of the height $H(\alpha_1) = H(\alpha_2) \leq Q$, in the strip width of $c(n)Q^{-\gamma}$, $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$, $Q > Q_0(n)$ near the smooth curve $y = f(x)$ were obtained. In our paper some new results about distribution of points with conjugate real and complex algebraic coordinates were obtained. In particular generalization of result mentioned above was obtained. The main idea of the proof is based on metric theorem about diophantine approximations in the domains G of small measure $\mu G < c_2(n)Q^{-\gamma_1}$, $0 \leq \gamma_1 \leq \frac{1}{3}$. *Keywords:* Diophantine approximations, Lebesgue measure, conjugate algebraic numbers, height of algebraic number.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Пусть задано некоторое $Q > 1$ и цилиндр $T = I \times K$, где $I \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ — интервал длины $|I| = c_1 Q^{-\gamma}$, $K \subset B(0,1)$ — круг радиуса $c_2 Q^{-\gamma}$ в комплексной плоскости, $0 < \gamma \leq 1$. Также считаем, что $T \cap \{|\mathrm{Im}\ z| \leq \delta\} = \varnothing$, где δ — некоторая малая величина.

Рассмотрим целочисленный неприводимый многочлен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

с условием НОД$(a_1, \ldots, a_n) = 1$ степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) \leq Q$, где $H(P) = \max\limits_{0 \leq j \leq n} |a_j|$. Корни α такого целочисленного многочлена $P(x)$ являются алгебраическими числами степени $\deg \alpha = \deg P = n$ и высоты $H(\alpha) = H(P) \leq Q$. Многочлен $P(x)$ называется минимальным многочленом алгебраического числа α.

Здесь и далее $c_i, i = 1, 2, ...$ являются величинами, зависящими только от степени многочлена.

Точку (α, β), $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ будем называть алгебраической, если α и β корни одного многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$.

Можно доказать, что алгебраические точки всюду плотны в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$, однако, если воспользоваться методом Шмидта [2], то меры цилиндров T окажутся значительно больше, чем $c_3 Q^{-3}$. В [3] доказано, что действительные алгебраические числа обязательно попадают в интервалы длины $c_4 Q^{-1}$ при достаточно большой величине c_4. В последнее время было получено несколько новых результатов о распределении алгебраических чисел, их дискриминантов и результантов [4]—[8]. Эти результаты явились естественным обобщением задач о распределении точек с рациональными координатами вблизи гладких кривых [12]—[16].

2. Распределение алгебраических точек в $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$

Докажем несколько теорем о распределении алгебраических точек в $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

Теорема 1. *Для любых натуральных Q и $n \geqslant 3$ существует цилиндр T объема $\mu T = c_5 Q^{-3}$, внутри которого нет алгебраических точек (α, β) степени $\deg \alpha = \deg \beta \leq n$ и высоты $H(\alpha) = H(\beta) \leq Q$.*

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *При любом наборе корней $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$, $1 \leqslant s \leqslant n$, многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ справедливо неравенство*

$$\prod_{j=1}^{s} |\alpha_{i_j}| < (n+1)2^n H(P)|a_n|^{-1}.$$

Лемма 1 доказана в [9].

Доказательство. Рассмотрим цилиндр $T_1 = I_1 \times K_1$, где I_1 — интервал вида $\left(\frac{1}{4} - c_6 Q^{-1};\ \frac{1}{4} + c_6 Q^{-1}\right)$, а K_1 — круг в комплексной плоскости вида

$$B\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, c_7 Q^{-1}\right).$$

Пусть существует алгебраическая точка $(\alpha, \beta) \in T_1$ с минимальным многочленом $P_1(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $k \leq n$. Рассмотрим результант многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x) = (4x-1)(2x^2 - 2x + 1)$. Так как многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ не имеют общих корней, то

$$1 \leq |R(P_1, P_2)|. \tag{1}$$

С другой стороны

$$|R(P_1, P_2)| = 8^k \cdot |a_k|^3 \cdot \left|\alpha - \frac{1}{4}\right| \cdot \left|\beta - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right| \cdot \left|\bar{\beta} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{k} \left|\alpha_j - \frac{1}{4}\right| \cdot \prod_{j=1, j\neq 2}^{k} \left|\alpha_j - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right| \cdot \prod_{j=1, j\neq 3}^{k} \left|\alpha_j - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right|.$$

Так как $(\alpha, \beta) \in T_1$ и $k \leq n$ имеем следующую оценку

$$|R(P_1, P_2)| \leq 8^n \cdot |a_k|^3 \cdot c_6 c_7^2 Q^{-3} \cdot \prod_{j=2}^{k} \left|\alpha_j - \frac{1}{4}\right| \cdot \prod_{j=1, j\neq 2}^{k} \left|\alpha_j - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right| \times$$

$$\times \prod_{j=1, j\neq 3}^{k} \left|\alpha_j - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right|.$$

Для оценки произведений воспользуемся леммой 1 и получим следующее неравенство

$$|R(P_1, P_2)| \leq 8^n \cdot |a_k|^3 \cdot c_6 c_7^2 Q^{-3} \cdot (k+1)^3 \cdot 2^{6k} \frac{H(\alpha)^3}{|a_k|^3} \leq$$

$$\leq 2^{9n}(n+1)^3 \cdot c_6 c_7^2 < 1$$

при $c_5 = c_6 c_7^2 = 2^{-9n-1}(n+1)^{-3}$. Данное неравенство противоречит (1). $\square$

Введем класс многочленов

$$\mathcal{P}_3(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P = 3, H(P) \leq Q\}.$$

Докажем следующую теорему 2, которая позволяет связать количество алгебраических точек третьей степени и высоты, не превосходящей Q с объемом цилиндра T.

Теорема 2. *При достаточно большом $Q > Q_0$ и достаточно больших величинах c_8 и c_9 любой цилиндр $T = I \times K$, где $\mu I \geqslant c_8 Q^{-\gamma}$, $\mu K \geqslant c_9 Q^{-2\gamma}$, $0 < \gamma \leq \frac{1}{3}$, содержит не менее, чем $c_{10} Q^4 \mu T$ алгебраических точек (α, β) степени $\deg\alpha = \deg\beta = 3$ и высоты $H(\alpha) = H(\beta) \leq Q$.*

В ходе доказательства теоремы 2 также будет построена регулярая система алгебраических точек.

Другим интересным вопросом является вопрос о количестве алгебраических точек возле некоторой поверхности. В данном случае можно рассматривать полосу, шириной порядка Q^{-1}. Из теоремы 2 следует, что мы не можем оценить количество алгебраических точек в цилиндрах T, объем которых имеет порядок $Q^{-3\gamma}$, $\frac{1}{3} < \gamma \leq 1$, однако, доля таких цилиндров мала. Данный факт позволяет нам доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $y = f(Imz, Rez)$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ — некоторая непрерывная функция, заданная на области $D \subset \mathbb{C}$. Определим множество $L(Q, \lambda)$ следующим образом*

$$L(Q,\lambda) = \{(y,z), z \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{R}, |y - f(Imz, Rez)| < c_{17} Q^{-\lambda}\}$$

при $0 \leq \lambda \leq 1$. Тогда количество алгебраических точек (α, β) степени $\deg\alpha = \deg\beta = 3$ и высоты $H(\alpha) = H(\beta) \leq Q$, принадлежащих $L(Q, \lambda)$, не меньше, чем $c_{18}(f, D) Q^{4-\lambda}$.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Для доказательства данной теоремы используем следующую лемму.

Лемма 2. *Обозначим через $L = L(Q, \delta_0, T)$ — множество точек $(x, z) \in T$, для которых система неравенств*

$$\begin{cases} |P_3(x)| < 2Q^{-\frac{1}{3}}, \\ |P_3(z)| < 2Q^{-\frac{1}{3}}, \\ \min\{|P_3'(x)|, |P_3'(z)|\} < \delta_0 Q, \end{cases} \tag{2}$$

имеет решение в полиномах $P_3 \in \mathcal{P}_3(Q)$. Тогда при достаточно малом δ_0 и достаточно больших c_8 и c_9 имеем

$$\mu L < \frac{1}{4} \mu T$$

для всех $T = I \times K$ с условиями $\mu I \geqslant c_8 Q^{-\gamma}$, $\mu K \geqslant c_9 Q^{-2\gamma}$, $0 < \gamma \leq \frac{1}{3}$.

Сформулируем вспомогательную лемму. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ корни многочлена $P(x)$. С каждым корнем α_i будем связывать множество

$$S(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_i| = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} |x - \alpha_j|\}.$$

Везде далее полагаем, что $i = 1$ и корни многочлена $P(x)$ упорядочены относительно α_1:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant |\alpha_1 - \alpha_3| \leqslant \ldots \leqslant |\alpha_1 - \alpha_n|.$$

Лемма 3. *Пусть $x \in S(\alpha_1)$. Тогда*

$$|x - \alpha_1| \leqslant n \frac{|P(x)|}{|P'(x)|}, \tag{3}$$

$$|x - \alpha_1| \leqslant 2^{n-1} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}, \tag{4}$$

$$|x - \alpha_1| \leqslant \min_{2 \leq j \leq n} \left\{ \left(2^{n-j} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|} |\alpha_1 - \alpha_2| \ldots |\alpha_1 - \alpha_j| \right)^{1/j} \right\}, \tag{5}$$

при условии, что $|P'(x)| \neq 0$, $|P'(\alpha_1)| \neq 0$.

Неравенство (3) следует из тождества

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_i},$$

а неравенства (4), (5) доказаны в [10, 11].

Доказательство. Рассмотрим систему неравенств (2) и найдем оценки снизу для производных $|P_3'(\alpha)|$ и $|P_3'(\beta)|$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ — действительный корень многочлена $P_3(x)$, а $\beta_1 \in \mathbb{C}$ — комплексный корень многочлена $P_3(x)$.

Воспользуемся леммой 3 и получим следующую оценку

$$|x - \alpha_1| \leq \min \left\{ \left(2 \frac{|P_3(x)|}{|P_3'(\alpha_1)|} |\alpha_1 - \beta_1| \right)^{1/2}, \left(\frac{|P_3(x)|}{|P_3'(\alpha_1)|} |\alpha_1 - \beta_1| |\alpha_1 - \bar{\beta}_1| \right)^{1/3} \right\}$$

откуда следует, что

$$|x - \alpha_1| \leq |P_3'(x)|^{1/3} |a_3|^{1/3} < 2Q^{-1/9}. \tag{6}$$

Аналогично

$$|x - \beta_1| < 2Q^{-1/9}. \tag{7}$$

Из условия $|\mathrm{Im} z| > \delta$, а также из неравенств (6) и (7) при $Q > Q_0$ следует, что

$$|\mathrm{Im}\beta| > \frac{\delta}{2}, \quad |\alpha - \beta| > \frac{\delta}{2}, \quad |\beta - \bar{\beta}| > \frac{\delta}{2}.$$

Используя данные неравенства находим оценки

$$|P_3'(\alpha)| = |a_3| \cdot |\alpha - \beta| \cdot |\alpha - \bar{\beta}| > \frac{\delta^2}{4}|a_3|,$$

$$|P_3'(\beta)| = |a_3| \cdot |\beta - \alpha| \cdot |\beta - \bar{\beta}| > \frac{\delta^2}{2}|a_3|.$$

От (2) переходим к рассмотрению системы неравенств

$$\begin{cases} |P_3(x)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}},\ |P_3(z)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}, \\ \frac{\delta^2}{4}|a_3| < |P_3'(\alpha)| < 2c_{11}Q, \\ \frac{\delta^2}{2}|a_3| < |P_3'(\beta)| < 2c_{12}Q, \\ \min\{c_{11}, c_{12}\} = \delta_0. \end{cases} \tag{8}$$

Из системы (8) следует, что

$$|a_3| \leqslant 4\delta_0\delta^{-2}Q. \tag{9}$$

Воспользуемся леммой 3 и рассмотрим цилиндры

$$\sigma(P) = \begin{cases} |x - \alpha| \le \frac{6}{\delta^2}Q^{-\frac{1}{3}}|a_3|^{-1}, \\ |z - \beta| \le \frac{6}{\delta^2}Q^{-\frac{1}{3}}|a_3|^{-1}, \end{cases} \tag{10}$$

где $P \in \mathcal{P}_3(Q)$. Отметим, что объем цилиндра $\mu\sigma(P) \le 54\pi\delta^{-6}Q^{-1}|a_3|^{-3} < c_8c_9Q^{-3\gamma} < \mu T$, при достаточно большой величине $c_8 \cdot c_9$.

Вычислим количество многочленов $P_3(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, для которых существует точка $(x, z) \in T$, удовлетворяющая системе (8). Для этого при фиксированном значении a_3 вычислим количество возможных троек $\#(a_2, a_1, a_0)$ коэффициентов многочлена $P_3(x)$.

Пусть d_1 — центр интервала I, а d_2 — центр круга K. Оценим значение многочлена $P_3(x)$ в точках d_1 и d_2.

Так как d_1 — центр интервала I, то любую точку $x \in I$ можно представить, как $x = d_1 + \theta_1 \cdot c_8Q^{-\gamma}$, $|\theta_1| < \frac{1}{2}$ и

$$|P_3(x)| = |P_3(d_1) + \theta_1 \cdot c_8Q^{-\gamma}(7a_3d_1^2 + 3a_2d_1 + a_1)|.$$

Тогда, используя систему неравенств (8), имеем

$$|P_3(d_1)| \le |P_3(x)| + |a_3|c_8Q^{-\gamma} \cdot c_{13}|\theta_1| \le c_8|a_3|Q^{-\gamma}|\xi_1(x)|, \tag{11}$$

где $\xi_1(x)$ — некоторая ограниченная функция, зависящая только от x.

Аналогично, так как d_2 — центр круга K, то для любую точку $z \in K$ можно представить, как $z = d_2 + \theta_2 \cdot c_9Q^{-\gamma}$, $|\theta_2| < \frac{1}{2}$, то используя неравенства (8), имеем

$$|P_3(d_2)| \le c_9|a_3|Q^{-\gamma}|\xi_2(z)|, \tag{12}$$

где $\xi_2(z)$ — некоторая ограниченная функция, зависящая только от z.

Неравенства (11) и (12) приводят нас к системе уравнений

$$\begin{cases} a_3d_1^3 + a_2d_1^2 + a_1d_1 + a_0 = l_1(x), \\ a_3d_2^3 + a_2d_2^2 + a_1d_2 + a_0 = l_2(z), \end{cases} \tag{13}$$

где $|l_1(x)| \le c_8|a_3|Q^{-\gamma}|\xi_1(x)|$, $|l_2(z)| \le c_9|a_3|Q^{-\gamma}|\xi_2(z)|$.

При фиксированном a_3 рассмотрим систему (13) для двух различных наборов коэффициентов $(a_{2,1}, a_{1,1}, a_{0,1})$ и $(a_{2,2}, a_{1,2}, a_{0,2})$, тогда

$$\begin{cases} (a_{2,1} - a_{2,2})d_1^2 + (a_{1,1} - a_{1,2})d_1 + (a_{0,1} - a_{0,2}) = l_1(x_1) - l_1(x_2) = \kappa_1(x_1, x_2), \\ (a_{2,1} - a_{2,2})d_2^2 + (a_{1,1} - a_{1,2})d_2 + (a_{0,1} - a_{0,2}) = l_2(z_1) - l_2(z_2) = \kappa_2(z_1, z_2). \end{cases}$$

Применим метод Крамера. Для этого представим систему в следующем виде

$$\begin{cases} (a_{2,1} - a_{2,2})d_1^2 + (a_{1,1} - a_{1,2})d_1 + (a_{0,1} - a_{0,2}) = \kappa_1(x_1, x_2), \\ (a_{2,1} - a_{2,2})(\mathrm{Re}^2 d_2 - \mathrm{Im}^2 d_2) + (a_{1,1} - a_{1,2})\mathrm{Re}d_2 + (a_{0,1} - a_{0,2}) = \mathrm{Re}\kappa_2(z_1, z_2), \\ (a_{2,1} - a_{2,2})2\mathrm{Re}d_2\mathrm{Im}d_2 + (a_{1,1} - a_{1,2})\mathrm{Im}d_2 = \mathrm{Im}\kappa_2(z_1, z_2). \end{cases}$$

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1^2 & d_1 & 1 \\ \mathrm{Re}^2 d_2 - \mathrm{Im}^2 d_2 & \mathrm{Re}d_2 & 1 \\ 2\mathrm{Re}d_2\mathrm{Im}d_2 & \mathrm{Im}d_2 & 0 \end{vmatrix} = \delta \cdot |d_1 - d_2|^2 > \delta^3.$$

Аналогичным образом, используя оценки

$$|\kappa_1(x_1, x_2)| \le 2c_8|a_3|Q^{-\gamma}|\xi_1(x)| \le |a_3|Q^{-1}$$

и

$$|\kappa_2(z_1, z_2)| \le 2c_9|a_3|Q^{-1}|\xi_2(z)| \le |a_3|Q^{-\gamma},$$

имеем

$$|\Delta_i| < c_{14}|a_3|Q^{-\gamma},\ i = 0, 1, 2.$$

Тогда $|a_{i,1} - a_{i,2}| < c_{14}\delta^{-3}|a_3|Q^{-\gamma}$, $i = 0, 1, 2$ и при фиксированном a_3 количество троек (a_2, a_1, a_0) можно оценить как

$$\#(a_2, a_1, a_0) \le \begin{cases} c_{14}^3\delta^{-9}|a_3|^3\mu T,\ |a_3| \geqslant Q^{\gamma}, \\ c_{15},\ |a_3| < Q^{\gamma}. \end{cases} \tag{14}$$

Оценим суммарную меру множеств (10)

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_3(q)} \mu\sigma(P) \le \sum_{a_3, a_2, a_1, a_0} \mu\sigma(P).$$

Воспользуемся оценками (9) и (14) и рассмотрим два случая.

1) $4\delta^{-2}\delta_0 Q \geqslant |a_3| \geqslant Q^{\gamma}$,

тогда

$$\sum_{a_3,a_2,a_1,a_0} \mu\sigma(P) \leq \sum_{|a_3|\geqslant Q^\gamma} \sum_{a_2,a_1,a_0} 54\pi\delta^{-6}Q^{-1}|a_3|^{-1} \leq$$

$$\leq 54\pi c_{14}^3\delta^{-15}Q^{-1}\mu T \sum_{|a_3|\geqslant Q^\gamma} |a_3|^3|a_3|^{-3} \leq 220\pi\delta^{-17}c_{14}^3\delta_0\mu T < \frac{1}{8}\mu T \qquad (15)$$

при $\delta_0 = 2^{-10}\delta^{17}c_{14}^{-3}\pi^{-1}$.

2) $|a_3| < Q^\gamma$,

тогда

$$\sum_{a_3,a_2,a_1,a_0} \mu\sigma(P) \leq \sum_{|a_3|<Q^\gamma} \sum_{a_2,a_1,a_0} 54\pi\delta^{-6}Q^{-1}|a_3|^{-1} \leq$$

$$\leq 54\pi c_{15}\delta^{-6}Q^{-1} \sum_{|a_3|<Q^\gamma} |a_3|^{-3} \leq 2^7\pi\delta^{-6}Q^{-1} < \frac{1}{8}\mu T \qquad (16)$$

при $c_8c_9 > 2^{10}\pi c_{15}\delta^{-6}$ и $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{3}$.

Таким образом, используя оценки (15) и (16) имеем

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_3(q)} \mu\sigma(P) \leq \frac{1}{8}\mu T + \frac{1}{8}\mu T = \frac{1}{4}\mu T.$$

□

Прежде, чем мы перейдем к доказательству теоремы 2 введем понятие регулярой системы для точек с одной комплексной и одной действительной координатами.

Определение 1. *Пусть* Γ *— счетное множество точек* $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ *и* $N : \Gamma \to \mathbb{R}$ *— положительная функция. Пару* (Γ, N) *назовём* ***регулярной системой****, если существует постоянная* $c_{16} = c_{16}(\Gamma, N) > 0$*, такая что для любого цилиндра* $T \subset \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ *найдется достаточно большое число* $M_0 = M_0(\Gamma, N, T) > 0$*, что при любом* $M > M_0$ *можно выбрать точки* $(\gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}), \ldots, (\gamma_{t,1}, \gamma_{t,2}) \in \Gamma\cap T$ *с условиями*

1) $N(\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}) \leq M$, $1 \leqslant i \leqslant t$,

2) цилиндры

$$\begin{cases} |x-\gamma_{i,1}| \leq M^{-\frac{1}{3}}, \\ |z-\gamma_{i,2}| \leq M^{-\frac{1}{3}}, \end{cases}$$

где $1 \leqslant i \leqslant t$ *не пересекаются,*

3) $t > c_{16}M\mu T$.

3. Доказательство теоремы 2

Воспользуемся результатами леммы 2. Рассмотрим множество $B = T\setminus L$. Из леммы 2 следует, что

$$\mu B \geqslant \frac{3}{4}\mu T \qquad (17)$$

при $Q > Q_0$. Рассмотим точку $(x_1, z_1) \in B$. Существует многочлен $P_1(x) \in \mathcal{P}_3(Q)$, удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} |P_1(x_1)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}},\ |P_1(z_1)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}, \\ |P_1'(x_1)| \geqslant \delta_0 Q,\ |P_1'(z_1)| \geqslant \delta_0 Q, \end{cases}$$

Рассмотрим корни α_1, β_1 многочлена $P_1(x)$. По лемме 3 имеем

$$\begin{cases} |x_1 - \alpha_1| \le \frac{3}{2}\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}}, \\ |z_1 - \beta_1| \le \frac{3}{2}\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}}. \end{cases} \tag{18}$$

Выберем максимальную систему точек $\Gamma = ((\gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}), \ldots, (\gamma_{t,1}, \gamma_{t,2}))$, удовлетворяющих условиям

$$H(\gamma_{i,1}) = H(\gamma_{i,2}) \le Q,$$

$$|x_1 - \alpha_1| > \frac{3}{2}\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}} \text{ или } |z_1 - \beta_1| > \frac{3}{2}\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}},\ 1 \le i \le t.$$

Из неравенства (18) и определения Γ следует, что для любой точки $(x_1, z_1) \in B$ найдется такая точка $(\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}) \in \Gamma$, что

$$\begin{cases} |x_1 - \gamma_{i,1}| \le 3\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}}, \\ |z_1 - \gamma_{i,2}| \le 3\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}}. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{t} \{(x_1, z_1) \in T : |x_1 - \gamma_{i,1}| \le 3\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}}, |z_1 - \gamma_{i,2}| \le 3\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}}\},$$

и из неравенства (17) следует, что

$$t \cdot 27\pi\delta_0^{-3}Q^{-4} \geqslant \mu B \geqslant \frac{3}{4}\mu T.$$

Таким образом, имеем

$$t \geqslant c_{10}Q^4\mu T.$$

□

Из данных рассуждений также следует, что алгебраические точки образуют регулярную систему в $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ с функцией $N(\alpha, \beta) = H(\alpha)^4 = H(\beta)^4$.

В задаче, которую будем решать далее, диапазон изменения γ расширим до $0 < \gamma \le 1$.

Исследуем вопрос о распределении алгебраических точек (α, β) вблизи поверхностей и докажем теорему 3 об оценке снизу количества алгебраических точек около гладкой поверхности. Для доказательства данной теоремы используем следующий вспомогательный результат.

Рассмотрим цилиндры $T = I \times K$, $\mu I = c_{19}Q^{-\gamma}$, $\mu K = c_{20}Q^{-2\gamma}$, $\frac{1}{3} < \gamma \le 1$, не содержащие точек $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, для которых существует многочлен $P_3 \in \in \mathcal{P}_3(Q)$, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} |P_3(x)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}, \\ |P_3(z)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}, \\ |a_3| \le \delta_0 Q^{\gamma}. \end{cases}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Обозначим через $L_1 = L_1(Q, \delta_0, T)$ — множество точек $(x, z) \in \in T$, для которых система неравенств*

$$\begin{cases} |P_3(x)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}, |P_3(z)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}, \\ \min\{|P_3'(x)|, |P_3'(z)|\} < \delta_0 Q, \\ |a_3| > \delta_0 Q^{\gamma} \end{cases} \tag{19}$$

имеет решение в полиномах $P_3 \in \mathcal{P}_3(Q)$. Тогда при достаточно малом δ_0 и достаточно больших c_{19} и c_{20} имеем

$$\mu L < \frac{1}{4}\mu T$$

для всех $T = I \times K$ с условиями $\mu I \geqslant c_{19}Q^{-\gamma}$, $\mu K \geqslant c_{20}Q^{-2\gamma}$, $\frac{1}{3} < \gamma \le 1$.

Доказательство. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 2, сводим систему неравенств (19) к следующей

$$\begin{cases} |P_3(x)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}},\ |P_3(z)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}, \\ \frac{\delta^2}{4}|a_3| < |P_3'(\alpha)| < 2c_{21}Q,\ \frac{\delta^2}{2}|a_3| < |P_3'(\beta)| < 2c_{22}Q, \\ |a_3| > \delta_0 Q^{\gamma}, \\ \min\{c_{21}, c_{22}\} = \delta_0. \end{cases} \tag{20}$$

Из системы (20) следует, что

$$|a_3| \leqslant 4\delta_0\delta^{-2}Q. \tag{21}$$

Воспользуемся леммой 3 и рассмотрим цилиндры

$$\sigma(P) = \begin{cases} |x - \alpha| \le \frac{6}{\delta^2}Q^{-\frac{1}{3}}|a_3|^{-1}, \\ |z - \beta| \le \frac{6}{\delta^2}Q^{-\frac{1}{3}}|a_3|^{-1}, \end{cases} \tag{22}$$

где $P \in \mathcal{P}_3(Q)$. Заметим также, что объемы цилиндров $\sigma(P)$ не превышают объем цилиндра T

$$\mu\sigma(P) \le 6^3\pi\delta^{-6}Q^{-1}|a_3|^{-3} < \mu T$$

при $Q > Q_0$.

По аналогии с доказательством леммы 2 вычислим количество троек (a_2, a_1, a_0) коэффициентов многочлена $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, удовлетворяющего системе (20), при фиксированном a_3.

Пусть d_1 — центр интервала I, а d_2 — центр круга K. Из системы (20) получим следующие оценки

$$\begin{aligned} |P_3(d_1)| \le c_{19}|a_3|Q^{-\gamma}|\xi_1(x)|, \\ |P_3(d_2)| \le c_{20}|a_3|Q^{-\gamma}|\xi_2(z)|, \end{aligned} \tag{23}$$

где $\xi_1(x)$ и $\xi_2(z)$ — некоторые ограниченные функции.

Используя неравенства (23) запишем систему уравнений

$$\begin{cases} a_3d_1^3 + a_2d_1^2 + a_1d_1 + a_0 = l_1(x), \\ a_3d_2^3 + a_2d_2^2 + a_1d_2 + a_0 = l_2(z), \end{cases}$$

где $|l_1(x)| \le c_819|a_3|Q^{-\gamma}|\xi_1(x)|$, $|l_2(z)| \le c_{20}|a_3|Q^{-\gamma}|\xi_2(z)|$.

При фиксированном a_3 рассмотрим систему (23) для двух различных наборов коэффициентов $(a_{2,1}, a_{1,1}, a_{0,1})$ и $(a_{2,2}, a_{1,2}, a_{0,2})$, тогда

$$\begin{cases} (a_{2,1} - a_{2,2})d_1^2 + (a_{1,1} - a_{1,2})d_1 + (a_{0,1} - a_{0,2}) = \kappa_1(x_1, x_2), \\ (a_{2,1} - a_{2,2})(\mathrm{Re}^2 d_2 - \mathrm{Im}^2 d_2) + (a_{1,1} - a_{1,2})\mathrm{Re} d_2 + (a_{0,1} - a_{0,2}) = \mathrm{Re}\kappa_2(z_1, z_2), \\ (a_{2,1} - a_{2,2})2\mathrm{Re} d_2 \mathrm{Im} d_2 + (a_{1,1} - a_{1,2})\mathrm{Im} d_2 = \mathrm{Im}\kappa_2(z_1, z_2), \end{cases}$$

где $\kappa_1(x_1, x_2) = l_1(x_1) - l_1(x_2)$ и $\kappa_2(z_1, z_2) = l_2(z_1) - l_2(z_2)$.

Решая данную систему методом Крамера получим, что при фиксированном a_3 количество троек

$$\#(a_2, a_1, a_0) \le c_{23}^3\delta^{-9}|a_3|^3\mu T. \tag{24}$$

Оценим суммарную меру множеств (22) и из оценок (21) и (24) имеем

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_3(q)} \mu\sigma(p) \le \sum_{a_3, a_2, a_1, a_0} \mu\sigma(P) \le 4c_{23}^3\delta^{-17}\delta_0\mu T < \frac{1}{4}\mu T$$

при $\delta_0 = 2^{-5}\delta^{17}c_{23}^{-3}c_{19}c_{20}$. □

Лемма 5. *При достаточно большом $Q > Q_0$ и достаточно больших величинах c_{19} и c_{20} любой цилиндр $T = I \times K$, где $\mu I \geqslant c_{19}Q^{-\gamma}$, $\mu K \geqslant c_{20}Q^{-2\gamma}$, $\frac{1}{3} < \gamma \le 1$, содержит не менее, чем $c_{24}Q^4\mu T$ алгебраических точек (α, β) степени $\deg\alpha = \deg\beta = 3$ и высоты $H(\alpha) = H(\beta) \le Q$.*

Доказательство. Для доказательства леммы 5 используем результат леммы 4. Рассмотрим множество $B_1 = T/L_1$. Из определения цилиндра T и леммы 4 следует, что

$$\mu B_1 \geqslant \frac{3}{4}\mu T \tag{25}$$

при $Q > Q_0$.

Рассмотрим точку $(x_1, z_1) \in B_1$. Существует многочлен $P_1(x) \in \mathcal{P}_3(Q)$, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} |P_3(x_1)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}},\ |P_3(z_1)| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}, \\ \min\{|P_1'(x_1)|, |P_1'(z_1)| > \delta_0 Q, \\ |a_3| > \delta_0 Q^{\gamma}. \end{cases} \tag{26}$$

Из леммы 3 следует, что

$$\begin{array}{l} |x_1 - \alpha_1| < \frac{9}{2}\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}}, \\ |z_1 - \beta_1| < \frac{9}{2}\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}}, \end{array} \tag{27}$$

где α_1 — действительный корень многочлена $P_1(x)$, β_1 — комплексный корень многочлена $P_1(x)$.

Через T_1 обозначим множество точек, удовлетворяющих неравенствам (27), тогда

$$\mu T_1 \leq 5^3\delta_0^{-3}\pi Q^{-4}.$$

Аналогичным образом рассмотрим точку $(x_2, z_2) \in B_2 = B_1/T_1$. Для нее существует многочлен $P_2(x) \in \mathcal{P}_3(Q)$, удовлетворяющий системе (26), и строим множество

$$T_2 = \left\{(x, z) : \begin{array}{l} |x - \alpha_2| < \frac{9}{2}\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}}, \\ |z - \beta_2| < \frac{9}{2}\delta_0^{-1}Q^{-\frac{4}{3}}, \end{array} \right\},$$

где $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_2 \in \mathbb{C}$ — корни многочлена $P_2(x)$ и $\mu T_2 \leq 5^3\delta_0^{-3}\pi Q^{-4}$.

Построение точек (α_i, β_i) можно продолжить до тех пор, пока множества T_i, $1 \leq i \leq t$ не покроют все множество B_1. Отсюда и из неравества (25) следуют оценки

$$\frac{3}{4}\mu T \leq \mu B_1 \leq \sum_{i=1}^{t} \mu T_i \leq 5^3\delta_0^{-3}t\pi Q^{-4}$$

и

$$t \geqslant c_{24}Q^4\mu T.$$

□

Проведем доказательство теоремы 3, используя результаты теоремы 2 и леммы 5.

4. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим два случая.

1) $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{3}$

Покроем область D кругами $K_i = B(z_i, Q^{-\lambda})$, $1 \leq i \leq t$ таким образом, чтобы $|z_i - z_j| = 2Q^{-\lambda}$, $\forall i, j$. В этом случае количество таких кругов можно оценить, как

$$t \geqslant \mu D \cdot 2^{-1}Q^{2\lambda}. \tag{28}$$

Рассмотрим цилиндры

$$T_i = \left\{(x,z) : |z - z_i| \le c_{25}(f)Q^{-\lambda}, |x - f(\mathrm{Im}z_i, \mathrm{Re}z_i)| \le c_{26}(f)Q^{-\lambda}\right\},\ 1 \le i \le t,$$

такие, что T_i полностью содержатся в $L(Q,\lambda)$. Так как $\mu T_i \le c_{27}(f)Q^{-3\lambda}$, $0 < < \lambda \le \frac{1}{3}$, то из теоремы 2 следует, что каждый цилиндр T_i содержит не менее, чем $c_{10}Q^4\mu T_i = c_{28}(f)Q^{4-3\lambda}$ алгебраических точек. Тогда с учетом неравенства (28) имеем, что количество алгебраических точек, принадлежащих $L(Q,\lambda)$ при $0 < \lambda \le \frac{1}{3}$ не менее, чем $c_{18}(f,D)Q^{4-\lambda}$.

2) $\frac{1}{3} < \lambda \le 1$

Аналогично первому случаю покроем область D кругами K_i и рассмотрим цилиндры T_i, $0 \le i \le t$. Вычислим количество цилиндров, которые содержат точки $(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, для которых существует многочлен $P_3 \in \mathcal{P}_3(Q)$, удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} |P_3(x')| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}, \\ |P_3(z')| < \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}, \\ |a_3| \le \delta_0 Q^{\lambda}. \end{cases} \tag{29}$$

Используя лемму 3 и неравенство $|\mathrm{Im}z| < \delta$ имеем, что при фиксированом многочлене $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ все точки (x', y'), удовлетворяющие системе (29), содежатся в цилиндре

$$\sigma(P) = \begin{cases} |x' - \alpha| \le \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}|a_3|^{-1}, \\ |z' - \beta| \le \frac{3}{2}Q^{-\frac{1}{3}}|a_3|^{-1}, \end{cases}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ - корни многочлена $P_3(x)$.

Оценим количество цилиндров T_i, $1 \le i \le t$, которые пересекаются с цилиндром $\sigma(P)$. Несложно заметить, что ширина полосы $L(Q,\lambda)$ намного меньше высоты цилиндра $\sigma(P)$. В связи с этим каждый цилиндр $\sigma(P)$ пересекает не более, чем $4Q^{2\lambda-2/3}|a_3|^{-2}$ цилиндров T_i.

Отсюда следует, что общее количество цилиндров T_i, содержащие точку (x', z') можно оценить, как

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_3(q)} 4Q^{2\lambda-2/3}|a_3|^{-2} \le 4Q^{2\lambda-2/3} \sum_{a_3,a_2,a_1,a_0} |a_3|^{-2} \le$$

$$\le 4Q^{2\lambda-2/3} \sum_{|a_3| < \delta_0 Q^{\lambda}} |a_3|^{-2} \le 2^4 Q^{2\lambda-2/3}. \tag{30}$$

Из оценки (30) следует, что количество m цилиндров T_i, $1 \le i \le t$, удовлетворяющих условию леммы 5 не менее,чем

$$m \geqslant c(D)Q^{2\lambda} - 2^4Q^{2\lambda-2/3} > \frac{1}{2}c(D)Q^{2\lambda} \tag{31}$$

при $Q > Q_0$.

Тогда из леммы 5 и оценки (31) следует, что количество алгебраических точек, принадлежащих $L(Q,\lambda)$ при $\frac{1}{3} < \lambda \le 1$ не менее, чем

$$\frac{1}{2}c(D)Q^{2\lambda} \cdot c_{27}(f)Q^{4-3\lambda} = c_{18}(f,D)Q^{4-\lambda}.$$

□

5. Заключение

Основные теоремы, полученые в статье, могут быть обобщены в различных направлениях. Конечно, хорошо бы доказать аналог теоремы 3 для точки с произвольным количеством действительных и комплексных сопряженных координат. Однако, такая теорема еще не доказана для точек только с действительными или только с комплекными координатами. В этих случаях в совместных диофантовых приближениях не удается перейти к приближениям с неприводимыми многочленами, что легко делается в одномерном случае. Решение указанных проблем позволит получить обобщение теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bernik V., Goetze F., Kukso O. On algebraic points in the plane near smooth curves // Lith. Math. Journal. 2014. Vol. 54, № 3. P. 231–251.

2. Schmidt W. T-numbers do exist // Symposia Mathematica, IV (INDAM, Rome, 1968/1969). 1970. P. 3–26.

3. Бударина Н. В., Берник В. И., О'Доннелл Х. Действительные алгебраические числа третьей степени в коротких интервалах // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 57, № 4. С. 23–26.

4. Beresnevich V., Bernik V., Goetze F. The distribution of close conjugate algebraic numbers // Compos. Math. 2010. Vol. 146, № 5. P. 1165–1179.

5. Бересневич В. В., Берник В. И., Гетце Ф. О распределении значений результантов целочисленных полиномов // Доклады НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 5. С. 21–23.

6. Бересневич В. В., Берник В. И., Гетце Ф. Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов // Доклады НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 2. С. 26—27.

7. Beresnevich V. Rational points ear manifolds and metric Diophantine approximation // Ann. of Math. 2012. Vol. 175, № 1. P. 187–235.

8. Bugeaud Y. Approximation by algebraic numbers // Cambridge Tracts in Mathematics. 2004. Vol. 160. Cambridge University Press. Cambridge. 274 p.

9. Фельдман Н. И. Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I. Аппроксимация логарифмов алгебраических чисел // Изв. АН СССР. 1951. Т. 15, № 1. С. 53–74.

10. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск: Наука и техника, 1967. 184 с.

11. Берник В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений // Acta Arith. 1983. Vol. 42, № 3. P. 219–253.

12. Beresnevich V. V., Vaughan R. C., Velani S. L. Inhomogeneous Diophantine approximation on planar curves // Math. Ann. 2011. Vol. 349, № 4. P. 929–942.

13. Beresnevich V., Dickinson D., Velani S. Diophantine approximation on planar curves and the distribution of rational points // Ann. of Math. 2007. Vol. 166, № 2. P. 367–426.

14. Bernik V., Beresnevich V., Goetze F., Kukso O. Distribution of algebraic numbers and metric theory of Diophantine approximation. Limit theorems in probability, statistics and number theory // Springer Proc. Math. Stat. 42, Springer, Heidelberg. 2013. P. 23–48.

15. Beresnevich V., Zorin E. Explizit bounds for rational points near planar curves and metric Diophantine approximation // Adv. Math. 2010. Vol. 225, № 6. P. 3064–3087.

16. Budarina N. V. The Mahler problem with nonmonotone right-hand side in field of complex numbers // Math. Notes. 2013. Vol. 93, № 5-6, P. 812–820.

REFERENCES

1. Bernik, V., Goetze, F. & Kukso, O. 2014, „On algebraic points in the plane near smooth curves“ *Lith. Math. Journal.*, vol. 54, no. 3, pp. 231–251.

2. Schmidt, W. 1970, „T-numbers do exist“, *Symposia Mathematica, IV (INDAM, Rome, 1968/1969)*, pp. 3–26.

3. Budarina, N. V., Bernik, V. I. & O'Donnell, H. 2012, „Real algebraic numbers of the third degree in a short intervals“, *Doklady NAN Belarusi*, vol. 57, no. 4, pp. 23–26.

4. Beresnevich, V., Bernik, V. & Goetze, F. 2010, „The distribution of close conjugate algebraic numbers“, *Compos. Math.*, vol. 146, no. 5, pp. 1165 – 1179.

5. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I. & Goetze, F. 2010, „On distribution of the values of resultants of integer polynomials“, *Doklady NAN Belarusi*, vol. 54, no. 5, pp. 21 – 23.

6. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I. & Goetze, F. 2010, „Conjugate approximations of zero by integer polynomial, its derivative and small values of discriminants“, *Doklady NAN Belarusi*, vol. 54, no. 2, pp. 26—27.

7. Beresnevich, V. 2012, „Rational points ear manifolds and metric Diophantine approximation“, *Ann. of Math.*, vol. 175, no. 1, pp. 187–235.

8. Bugeaud, Y. 2004, „Approximation by algebraic numbers“ Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 160. Cambridge University Press. Cambridge. 274 pp.

9. Feldman, N. I. 1951, „Approximation of some transcendental numbers. I. Approximation of logarithms of algebraic numbers“, *Izv. AN SSSR*, vol. 15, no. 1, pp. 53–74.

10. Sprindzhuk, V. G. 1967, „Problema Malera v metricheskoy toerii chisel“ (Russian)[Mahlers's problem in metric number theory], *Minsk: Nauka i tehnika*, 184 pp.

11. Bernik, V. I. 1983, „Using Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximation“, *Acta Arith.*, vol. 42, no. 3, pp. 219–253.

12. Beresnevich, V. V., Vaughan, R. C. & Velani, S. L. 2011, „Inhomogeneous Diophantine approximation on planar curves“, *Math. Ann.*, vol. 349, no. 4, pp. 929–942.

13. Beresnevich, V., Dickinson, D. & Velani, S. 2007, „Diophantine approximation on planar curves and the distribution of rational points“, *Ann. of Math.*, vol. 166, no. 2, pp. 367–426.

14. Bernik, V., Beresnevich, V., Goetze, F. & Kukso, O. 2013, „Distribution of algebraic numbers and metric theory of Diophantine approximation. Limit theorems in probability, statistics and number theory“, *Springer Proc. Math. Stat. 42, Springer, Heidelberg*, pp. 23–48.

15. Beresnevich, V. & Zorin, E. 2010, „Explizit bounds for rational points near planar curves and metric Diophantine approximation“, *Adv. Math.*, vol. 225, no. 6, pp. 3064–3087.

16. Budarina, N. V. 2013, „The Mahler problem with nonmonotone right-hand side in field of complex numbers“, *Mathematical Notes*, vol. 93, no. 5-6, pp. 812–820.

Институт математики НАН Беларуси.
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДО РАН
Поступило 08.07.2015