ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2016, т. 292, с. 43–68

УДК 512.741+517.583

Кольца коэффициентов формальных групп Тейта, задающих роды Кричевера[1]

Е. Ю. Бунькова[2,3], В. М. Бухштабер[2,4], А. В. Устинов[5]

Поступило 6 ноября 2015 г.

К юбилею Владимира Петровича Платонова
с восхищением его выдающимися результатами

Работа посвящена задачам на стыке теории формальных групп, теории родов Хирцебруха и теории эллиптических функций. В центре внимания формальные группы Тейта, соответствующие общей пятипараметрической модели эллиптической кривой, и формальные группы, соответствующие общему четырехпараметрическому роду Кричевера. Описаны кольца коэффициентов формальных групп, экспоненты которых задаются эллиптическими функциями уровней 2 и 3.

DOI: 10.1134/S0371968516010040

1. ВВЕДЕНИЕ

Все кольца, рассматриваемые в настоящей работе, будут предполагаться коммутативными кольцами с единицей. Мы будем использовать следующие стандартные обозначения: $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ — кольцо рациональных чисел, $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, $\mathbb{F}_p$ — поле вычетов из p элементов, Ω_{U} — кольцо кобордизмов стабильно комплексных многообразий.

Для универсальной формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(u,v) = u + v + \sum \alpha_{i,j} u^i v^j$, где $i+j \ge 2$, $i>0$ и $j>0$, кольцо коэффициентов $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$ задается как $\mathbb{Z}[\alpha_{i,j}]/J$, где J — идеал ассоциативности (см. разд. 3 ниже).

Согласно теореме Лазара [14] имеет место изоморфизм $\mathcal{R}_{\mathrm{U}} = \mathbb{Z}[e_k\colon k=1,2,\ldots]$ (новое доказательство см. в [7]). Не существует канонического выбора мультипликативных образующих e_k, $k=1,2,\ldots$, и с этим связаны нетривиальные задачи классификации формальных групп над данным кольцом R с точностью до замены координат u и v над R (случай $R=\mathbb{Z}$ см. в [12]).

Важной является задача построения формальных групп над данным кольцом R, кольцо коэффициентов которых явно описывается в терминах мультипликативных образующих кольца R, так как каждое решение этой задачи несет информацию о коэффициентах $\alpha_{i,j}$ как полиномах от образующих e_k.

---

[1]Исследования Е.Ю. Буньковой выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00012-а) и программы “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” Президиума РАН. Исследования А.В. Устинова (разд. 8, 12, 14, 15) выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00335).

[2]Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.

[3]E-mail: bunkova@mi.ras.ru

[4]Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия.
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

[5]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, Россия; Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия.
E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Согласно теореме Милнора–Новикова кольцо Ω_{U} изоморфно кольцу $\mathbb{Z}[a_k\colon k = 1, 2, \ldots]$. В теории комплексных кобордизмов $\mathrm{U}^*(\cdot)$ определена замечательная формальная группа геометрических кобордизмов (см. [15]) $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(u, v)$ над кольцом Ω_{U}. Гомоморфизм $\mathcal{R}_{\mathrm{U}} \to \Omega_{\mathrm{U}}$, классифицирующий эту группу, является изоморфизмом (см. [19]). Используя этот результат, мы будем отождествлять кольца $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$ и Ω_{U}.

Связь теории формальных групп с теорией кобордизмов привела к глубокому взаимопроникновению идей, методов и результатов этих теорий (см. [2, 5, 11]).

Одним из наиболее известных результатов алгебраической топологии является решение проблемы Милнора–Хирцебруха о соотношениях между числами Чженя стабильно комплексных многообразий, полученное независимо Стонгом и Хаттори (см. [8, 20]).

Опишем результат из теории формальных групп, эквивалентный теореме Стонга–Хаттори о характеристических числах стабильно комплексных многообразий.

Рассмотрим кольцо $\mathcal{B} = \mathbb{Z}[a, b_1, \ldots, b_n, \ldots]$ и ряд $b(x) = x + b_1 x^2 + \ldots + b_n x^{n+1} + \ldots$. Используя формальную группу $u + v + auv$ в комплексной K-теории, введем формальную группу $F(u, v)$ над $\mathcal{B}$ при помощи тождества

$$b(x + y + axy) = F(b(x), b(y)),$$

т.е. при помощи общей замены $u = b(x)$, $v = b(y)$ координат u и v. Коэффициенты формальной группы $F(u, v)$ можно явно выразить в виде полиномов от $a, b_1, \ldots, b_n, \ldots$. Кольцевой гомоморфизм $h\colon \Omega_{\mathrm{U}} \to \mathcal{B}$, классифицирующий эту группу, позволяет записать образ коэффициентов $\alpha_{i,j}$ универсальной формальной группы в виде полиномов от $a, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ и непосредственно доказать, что h является мономорфизмом на прямое слагаемое. Этот результат эквивалентен результату Стонга–Хаттори о том, что характеристические числа со значениями в комплексной K-теории описывают все соотношения делимости классических характеристических чисел стабильно комплексных многообразий.

Сформулируем результаты, которые легли в основу настоящей работы (в скобках указаны номера разделов, в которых эти результаты излагаются в необходимой нам форме).

В [3] в терминах $\wp$-функций Вейерштрасса описаны закон сложения в формальной группе Тейта $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u, v)$ над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6]$ и ее экспонента $f_{\mathrm{T}}(x)$ (см. разд. 5). Таким образом, получен пятипараметрический род Хирцебруха $L_{f_{\mathrm{T}}}\colon \Omega_{\mathrm{U}} \to \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6]$, в приложениях которого можно использовать классическую теорию эллиптических функций. Этот род мы называем родом Тейта.

В [13] И.М. Кричевер ввел род Хирцебруха в терминах эллиптической функции Бейкера–Ахиезера (см. разд. 6), который позволил получить важные алгебро-топологические приложения на основе аналитических свойств этой функции. Отметим, что все знаменитые роды Хирцебруха оказались специализациями рода Кричевера.

В [3] описаны все роды Тейта, которые реализуются как роды Кричевера.

В [1] была введена формальная группа вида

$$F(u, v) = \frac{u^2 A(v) - v^2 A(u)}{uB(v) - vB(u)}$$

и было показано, что экспонента универсальной формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{B}}(u, v)$ этого вида задает род Кричевера (см. разд. 7).

В [7] описаны кольцо коэффициентов $\mathcal{R}_{\mathrm{B}}$ формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{B}}(u, v)$ (см. разд. 7) и кольца коэффициентов ее важных специализаций.

В разд. 9 описаны все специализации формальной группы Тейта, одновременно являющиеся специализациями формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{B}}(u, v)$.

Обозначим через $\mathcal{S}_2$ кольцо коэффициентов формальной группы $\mathscr{F}_2(u,v)$, представляющей собой специализацию $\{A(u)=1\}$ формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{B}}(u,v)$, и через $\mathcal{R}_2$ кольцо коэффициентов специализации $\{\mu_k=0,\ k=1,3,6\}$ формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)$.

Обозначим через $\mathcal{S}_3$ кольцо коэффициентов формальной группы $\mathscr{F}_3(u,v)$, представляющей собой специализацию $\{B(u)=A(u)^2\}$ формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{B}}(u,v)$, и через $\mathcal{R}_3$ кольцо коэффициентов специализации $\{\mu_2=-\mu_1^2,\ \mu_4=-\mu_1\mu_3,\ 3\mu_6=-\mu_3^2\}$ формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)$.

Отметим, что в [18] найдено выражение экспоненты формальной группы $\mathscr{F}_3(u,v)$ в терминах полиномов Якоби.

Основные результаты нашей работы (см. разд. 11, 12) следующие.

Кольца $\mathcal{S}_k$, $k=2,3$, не имеют кручения, и формальные группы $\mathscr{F}_k(u,v)$ задаются двупараметрическими эллиптическими родами Хирцебруха уровня 2 и 3 соответственно (см. [13, 10]). Отметим, что при $k=2$ это знаменитый род Ошанина–Виттена [17, 22].

Существуют классифицирующие гомоморфизмы $h_k\colon \mathcal{S}_k\to\mathcal{R}_k$, $k=2,3$, которые являются изоморфизмами.

Из этих результатов вытекают следствия, важные для теории формальных групп и для алгебраической топологии, так как

- кольцо $\mathcal{S}_2$, которое мультипликативно порождено элементами e_n, где $n=2^r$, $r\geq 1$, является подкольцом в $\mathbb{Z}[\mu_2,\mu_4]$;
- кольцо $\mathcal{S}_3$, которое мультипликативно порождено элементами e_n, где $n=3^r$, $r\geq 0$, является подкольцом в $\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_3,\mu_6]/\{\mu_3^2=-3\mu_6\}$.

2. ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ

Одномерным формальным групповым законом (или *формальной группой*) над кольцом R называется формальный ряд

$$F(u,v)=u+v+\sum_{i,j\geq 1}a_{i,j}u^iv^j\in R[[u,v]],\tag{2.1}$$

удовлетворяющий условиям ассоциативности

$$F(u,F(v,w))=F(F(u,v),w)$$

и коммутативности

$$F(u,v)=F(v,u).$$

Отметим, что если кольцо R не имеет нильпотентных элементов, то из условия ассоциативности уже вытекает условие коммутативности (см. [14]).

Экспонентой формальной группы $F(u,v)$ над R называется формальный ряд $f(x)\in R\otimes\otimes\mathbb{Q}[[x]]$, однозначно определяемый законом сложения

$$f(x+y)=F(f(x),f(y)),\qquad f(0)=0,\quad f'(0)=1.\tag{2.2}$$

Таким образом, замена $u=f(x)$, $v=f(y)$ линеаризует любой закон $F(u,v)$ над $R\otimes\mathbb{Q}$. Функционально обратный к $f(x)$ ряд $g(u)$ называется *логарифмом*.

Если кольцо R без кручения, то формальная группа $F(u,v)$ над R однозначно восстанавливается по ее экспоненте $f(x)$ благодаря соотношению

$$\frac{\partial}{\partial v}F(u,v)\bigg|_{v=0}=\frac{1}{g'(u)}.\tag{2.3}$$

Говорят, что $F(u,v)$ линеаризуется над R, если экспонента $f(x)$ определена над R. Например, если $F(u,u)=0$, то кольцо R является алгеброй над полем вычетов $\mathbb{F}_2$ и существует ряд $f(x)\in R[[x]]$ такой, что выполняются равенства (2.2) (см. [14, 9]).

3. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ

Формальная группа $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(u,v) = u + v + \sum \alpha_{i,j}u^iv^j$ над кольцом $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$ называется *универсальной формальной группой*, если для произвольной формальной группы $F(u,v)$ над произвольным кольцом R существует единственный гомоморфизм $h_F\colon \mathcal{R}_{\mathrm{U}} \to R$ такой, что $F(u,v) = u + v + \sum h_F(\alpha_{i,j})u^iv^j$. Гомоморфизм h_F называется *классифицирующим*.

Далее мы будем предполагать, что кольцевой гомоморфизм h_F является градуированным, т.е. что кольцо R градуированное и $\deg a_{i,j} = -2(i+j-1)$.

В кольце R можно выделить подкольцо R_F коэффициентов формальной группы $F(u,v)$. По определению кольцо R_F мультипликативно порождается элементами $a_{i,j} = h_F(\alpha_{i,j})$. В случае $R = R_F$ формальная группа $F(u,v)$ над R называется *порождающей*.

Мы будем говорить о *формальной группе данного вида*, если на ее закон наложены дополнительные условия (помимо ассоциативности и коммутативности). Мы будем говорить об *универсальной формальной группе данного вида*, если существует формальная группа данного вида $\mathcal{F}_{\mathrm{V}}(u,v)$ над $\mathcal{R}_{\mathrm{V}}$ такая, что для любой формальной группы этого вида $F(u,v)$ над R существует единственный гомоморфизм $h_F^{\mathrm{V}}\colon \mathcal{R}_{\mathrm{V}} \to R$ такой, что $F(u,v) = u + v + \sum h_F^{\mathrm{V}}(h_{\mathrm{V}}(\alpha_{i,j}))u^iv^j$, где h_{V} — классифицирующий гомоморфизм для $\mathcal{F}_{\mathrm{V}}$. Гомоморфизм h_F^{V} мы будем также называть *классифицирующим*.

Мы будем говорить, что формальная группа $F(u,v)$ над кольцом R является *специализацией* формальной группы $\mathcal{F}(u,v)$ над кольцом $\mathcal{R}$, если существует кольцевой гомоморфизм $h_F^{\mathcal{F}}\colon \mathcal{R} \to R$ такой, что кольцевой гомоморфизм $h_F\colon \mathcal{R}_{\mathrm{U}} \to R$ разлагается в композицию $h_F^{\mathcal{F}}h_{\mathcal{F}}$. В частности, любая формальная группа данного вида является специализацией универсальной формальной группы данного вида. Таким образом, определен идеал $I_F = \operatorname{Ker} h_F^{\mathcal{F}} \subset \mathcal{R}$, который мы будем называть *идеалом специализации формальной группы* $F(u,v)$.

Напомним конструкцию формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(u,v)$. Рассмотрим кольцо $\mathcal{U} = \mathbb{Z}[\beta_{i,j}\colon i \le j \in \mathbb{N}]$ и формальный ряд $\widehat{F}(u,v) = u + v + \sum \beta_{i,j}u^iv^j$, где $\beta_{j,i} = \beta_{i,j}$. Положим $\widehat{F}(\widehat{F}(u,v),w) - \widehat{F}(u,\widehat{F}(v,w)) = \sum r_{i,j,k}u^iv^jw^k$. Тогда $\mathcal{R}_{\mathrm{U}} = \mathcal{U}/J$, где $J \subset \mathcal{U}$ — идеал ассоциативности с образующими $r_{i,j,k}$. Для канонической проекции $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{R}_{\mathrm{U}}$ получим $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(u,v) = u + v + \sum \alpha_{i,j}u^iv^j$, где $\alpha_{i,j} = \pi(\beta_{i,j})$.

Классифицирующий кольцевой гомоморфизм $h_F\colon \mathcal{R}_{\mathrm{U}} \to R$ задается гомоморфизмом $\widehat{h}_F\colon \mathcal{U} \to R$, $\widehat{h}_F(\beta_{i,j}) = a_{i,j}$. Из условия ассоциативности следует, что гомоморфизм $\widehat{h}_F$ пропускается через $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$:

$$\mathcal{U} \to \mathcal{R}_{\mathrm{U}} \to R.$$

По теореме Лазара (см. [14], а также [7]) кольцо $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$ изоморфно кольцу $\mathbb{Z}[e_k\colon k = 1,2,\ldots]$, где $\deg e_k = -2k$. Выбор образующих e_k не каноничен. Если кольцевой гомоморфизм $h_F\colon \mathcal{R}_{\mathrm{U}} \to R$, классифицирующий формальную группу $F(u,v)$, является эпиморфизмом, то можно выбрать такой набор образующих $e_1,\ldots,e_n,\ldots$, что множество ненулевых элементов $h_F(e_n)$ представляет собой минимальный набор мультипликативных образующих кольца R. Нам далее понадобятся следующие две леммы, каждая из которых позволяет выбрать такой набор мультипликативных образующих.

Лемма 3.1 (следствие из теоремы Лазара). *Пусть формальная группа $F(u,v)$ над кольцом $R = \mathbb{Z}[\beta_k\colon k = 1,2,\ldots]/J$, где $\deg \beta_k = -2k$ и J — градуированный идеал, является порождающей. Тогда в кольце $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$ можно выбрать образующие e_k так, что $h_F(e_k) = \beta_k$.*

Приведем конструкцию из [7].

Для натуральных чисел $m_1,\ldots,m_k$ обозначим через $(m_1,\ldots,m_k)$ их наибольший общий делитель. С помощью алгоритма Евклида всегда можно найти целые $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, для которых выполняется равенство

$$\lambda_1m_1 + \ldots + \lambda_km_k = (m_1,\ldots,m_k).$$

Для $n \geq 2$ определим число

$$d(n) = \left(\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1} \right) = \begin{cases} p, & \text{если } n = p^k, \text{ где } p \text{ — простое число,} \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Для каждого $n \geq 1$ зафиксируем набор чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, для которых выполняется равенство

$$\lambda_1 \binom{n+1}{1} + \lambda_2 \binom{n+1}{2} + \ldots + \lambda_n \binom{n+1}{n} = d(n+1). \tag{3.2}$$

Это позволяет ввести для любой формальной группы $F(u,v)$ над любым кольцом R элементы $\epsilon_n \in R$ по формуле

$$\epsilon_n = \lambda_1 a_{1,n} + \lambda_2 a_{2,n-1} + \ldots + \lambda_n a_{n,1}. \tag{3.3}$$

Обратим внимание, что набор чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, удовлетворяющих (3.2), определен неоднозначно.

Замечание 3.2. Если число $n+1$ простое, то можно положить $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (1, 0, \dots, 0)$ и $\epsilon_n = a_{1,n}$.

Лемма 3.3 (см. [7, замечание 4.4]). *Образующие e_k кольца $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$ можно задать по формуле (3.3) для формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(u,v)$. При этом для любой формальной группы $F(u,v)$ получим*

$$h_F(e_k) = \epsilon_k.$$

Для $a \in R$ через $\widehat{a}$ будем обозначать элемент $\widehat{a} \in \widehat{R} = R/I^2$, где I^2 — идеал в кольце R, порожденный всевозможными элементами вида $a_{i_1,j_1} a_{i_2,j_2}$ с индексами i_1, i_2, j_1, j_2, каждый из которых не меньше 1.

Определение 3.4. Для формальной группы $F(u,v)$ над кольцом R определим функцию $\rho_F \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ так, что $\rho_F(n)$ есть порядок элемента $\widehat{\epsilon}_n$ в кольце $\widehat{R}$.

Обратим внимание, что значение $\rho_F(n)$ не зависит от выбора набора $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ в (3.2).

В случае порождающей формальной группы $F(u,v)$ над R кольцо $R = R_F$ мультипликативно порождается набором всех элементов $\epsilon_k = h_F(e_k)$ таких, что $\rho_F(k) > 1$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{\mathrm{U},2}(u,v)$ универсальную формальную группу для групп, на закон которых $F(u,v)$ наложено условие $F(u,u) = 0$.

Теорема 3.5 [14, 9]. 1. *Формальная группа $\mathcal{F}_{\mathrm{U},2}(u,v)$ определена над кольцом $\mathcal{R}_{\mathrm{U},2} = \mathbb{F}_2[\gamma_2, \gamma_4, \dots, \gamma_n, \dots]$, где $n \neq 2^k - 1$ для $k \geq 1$.*

2. *Формальная группа $\mathcal{F}_{\mathrm{U},2}(u,v)$ линеаризуется над $\mathcal{R}_{\mathrm{U},2}$ экспонентой*

$$f(x) = x + \sum_{n \neq 2^k - 1} \gamma_n x^{n+1}.$$

4. РОД ХИРЦЕБРУХА

Для ряда $f(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} f_k x^{k+1}/(k+1)! \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$, где $f_k \in R$, положим

$$L_{f,m} = L_f(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i}{f(x_i)},$$

где σ_k есть k-я элементарная симметрическая функция от $x_1, \dots, x_m$. Для $m = 3$ имеем

$$L_f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1 - \frac{1}{2} f_1 \sigma_1 + \left(\frac{1}{4} f_1^2 - \frac{1}{6} f_2 \right) \sigma_1^2 - \left(\frac{1}{4} f_1^2 - \frac{1}{3} f_2 \right) \sigma_2 -$$

$$- \left(\frac{1}{8} f_1^3 - \frac{1}{6} f_1 f_2 + \frac{1}{24} f_3 \right) \sigma_1^3 + \left(\frac{1}{4} f_1^3 - \frac{5}{12} f_1 f_2 + \frac{1}{8} f_3 \right) \sigma_1 \sigma_2 - \left(\frac{1}{8} f_1^3 - \frac{1}{4} f_1 f_2 + \frac{1}{8} f_3 \right) \sigma_3 + \ldots .$$

Комплексным характеристическим классом Хирцебруха комплексного m-мерного векторного расслоения $\xi \to B$ называется класс когомологий

$$L_{f,m}(\xi) = L_f(c_1(\xi), \dots, c_m(\xi)) \in H^*(B; R \otimes \mathbb{Q}),$$

где $c_k(\xi)$ есть k-й класс Чженя расслоения ξ.

В важном частном случае, когда $c_1(\xi) = 0$, мы получаем

$$L_f(0, c_2(\xi), \dots, c_m(\xi)) = 1 - \left(\frac{1}{4}f_1^2 - \frac{1}{3}f_2\right)c_2(\xi) - \left(\frac{1}{8}f_1^3 - \frac{1}{4}f_1f_2 + \frac{1}{8}f_3\right)c_3(\xi) +$$
$$+ \left(\frac{1}{16}f_1^4 - \frac{1}{6}f_1^2f_2 + \frac{1}{12}f_2^2 + \frac{1}{24}f_1f_3 - \frac{1}{60}f_4\right)c_2(\xi)^2 +$$
$$+ \left(-\frac{1}{16}f_1^4 + \frac{1}{6}f_1^2f_2 - \frac{1}{18}f_2^2 - \frac{1}{12}f_1f_3 + \frac{1}{30}f_4\right)c_4(\xi) + \dots .$$

Гладкое замкнутое многообразие M^{2n} называется *стабильно комплексным*, если для некоторого целого $m \geq n$ существует комплексное m-мерное векторное расслоение $\xi \to M^{2n}$ и фиксирован изоморфизм вещественных векторных расслоений

$$\rho\colon\ \tau(M^{2n}) \oplus \mathbb{R}^{2(m-n)} \to \xi$$

над M^{2n}. Определен фундаментальный цикл $\langle M^{2n}\rangle \in H_{2n}(M^{2n}, \mathbb{Z})$, соответствующий канонической ориентации расслоения ξ.

Комплексный род Хирцебруха $L_f(M^{2n})$ стабильно комплексного многообразия M^{2n} задается формулой

$$L_f(M^{2n}) = (L_{f,n}(\xi), \langle M^{2n}\rangle) \in R \otimes \mathbb{Q}.$$

Соответствие $[M^{2n}] \to L_f(M^{2n})$ задает кольцевой гомоморфизм

$$L_f\colon\ \Omega_{\mathrm{U}} \to R \otimes \mathbb{Q},$$

который называется *родом Хирцебруха ряда f*.

Род Хирцебруха называется *R-целочисленным*, если он задает кольцевой гомоморфизм $\Omega_{\mathrm{U}} \to R$.

Из универсальности формальной группы комплексных кобордизмов следует, что каждая формальная группа $F(u,v)$ над кольцом R задает R-целочисленный род Хирцебруха $L_f\colon \Omega_{\mathrm{U}} \to R$, где $f(x) \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$ — экспонента этой группы.

Теорема 4.1 (А.С. Мищенко [15]). *Для логарифма $g(u)$ формальной группы геометрических кобордизмов $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(u,v)$ имеет место формула*

$$g(u) = u + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbb{C}\mathrm{P}^n]\frac{u^{n+1}}{n+1}.$$

Следствие 4.2 [16]. *Для любого рода Хирцебруха $L_f\colon \Omega_{\mathrm{U}} \to R \otimes \mathbb{Q}$ имеет место формула*

$$u + \sum_{n=1}^{\infty} L_f(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)\frac{u^{n+1}}{n+1} = g_f(u),$$

где $g_f(f(x)) = x$. Если кольцо R не имеет кручения и $L\colon \Omega_{\mathrm{U}} \to R$ — некоторый кольцевой гомоморфизм, то $L = L_f$, где $f(x)$ — ряд такой, что

$$u + \sum L[\mathbb{C}\mathrm{P}^n]\frac{u^{n+1}}{n+1} = g_f(u).$$

5. ФОРМАЛЬНАЯ ГРУППА ТЕЙТА

Детали описания универсальной формальной группы Тейта см. в [3].

Общая модель Вейерштрасса эллиптической кривой в однородных координатах $(X:Y:Z)$ задается уравнением

$$Y^2Z + \mu_1 XYZ + \mu_3 YZ^2 = X^3 + \mu_2 X^2 Z + \mu_4 XZ^2 + \mu_6 Z^3, \tag{5.1}$$

зависящим от пяти параметров $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6)$.

Линейной заменой координат

$$(X:Y:Z) \mapsto \Big(X + \frac{\nu_2}{2}\,Z : 2Y + \mu_1 X + \mu_3 Z : Z\Big), \qquad \nu_2 = \frac{\mu_1^2 + 4\mu_2}{6},$$

она переводится в *стандартную модель Вейерштрасса эллиптической кривой*, задаваемую в окрестности $(X:Y:Z)\colon Z \neq 0$ в координатах Вейерштрасса $(x:y:1)$ уравнением

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \tag{5.2}$$

где

$$g_2 = 3\nu_2^2 - 2\mu_1\mu_3 - 4\mu_4, \qquad g_3 = -\nu_2^3 + \nu_2\mu_1\mu_3 - \mu_3^2 + 2\nu_2\mu_4 - 4\mu_6. \tag{5.3}$$

Отображение $t \mapsto (x,y) = (\wp(t), \wp'(t))$, где $\wp(t)$ есть $\wp$-функция Вейерштрасса с параметрами g_2, g_3, задает униформизацию кривой (5.2).

В окрестности $(X:Y:Z)\colon Y \neq 0$ в координатах Тейта $(u:-1:s)$ (см. [3, 21]) уравнение эллиптической кривой (5.1) принимает вид

$$s = u^3 + \mu_1 us + \mu_2 u^2 s + \mu_3 s^2 + \mu_4 us^2 + \mu_6 s^3. \tag{5.4}$$

Непосредственно из уравнения (5.4) видно, что координату s можно задать рядом $s(u) \in \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6][[u]]$. Имеем

$$s(u) = u^3 + \mu_1 u^4 + \big(\mu_2 + \mu_1^2\big)u^5 + \big(\mu_3 + 2\mu_1\mu_2 + \mu_1^3\big)u^6 + \dots .$$

Таким образом, отображение $u \mapsto (u, s(u))$ задает униформизацию кривой (5.4).

Классическая геометрическая конструкция групповой структуры на эллиптической кривой в координатах $(u, s(u))$ в окрестности точки $(0,0)$ задает формальную группу $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)$ над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6]$, которую мы будем называть *формальной группой Тейта.*

Теорема 5.1 (см. [3])**.** *Закон сложения в формальной группе $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)$ имеет вид*

$$\left(u + v - uv\frac{\mu_1 + \mu_3 m + (\mu_4 + 2\mu_6 m)k}{1 - \mu_3 k - \mu_6 k^2}\right)\frac{1 + \mu_2 m + \mu_4 m^2 + \mu_6 m^3}{(1 + \mu_2 n + \mu_4 n^2 + \mu_6 n^3)(1 - \mu_3 k - \mu_6 k^2)}, \tag{5.5}$$

где

$$m = \frac{s(u) - s(v)}{u - v}, \qquad k = \frac{us(v) - vs(u)}{u - v}, \qquad n = m + uv\frac{1 + \mu_2 m + \mu_4 m^2 + \mu_6 m^3}{1 - \mu_3 k - \mu_6 k^2}.$$

По модулю идеала, порожденного элементами $\mu_i\mu_j$, имеем

$$\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v) \equiv u + v - uv\Big(\mu_1 + \mu_2(u+v) + \mu_3(2u^2 + 3uv + 2v^2) + {} + 2\mu_4(u+v)(u^2 + uv + v^2) + 3\mu_6(u+v)(u^2 + uv + v^2)^2\Big). \tag{5.6}$$

Следовательно, $2\mu_4$ и $3\mu_6$ принадлежат кольцу коэффициентов $\mathcal{R}_{\mathrm{T}}$, но μ_4 и μ_6 не принадлежат этому кольцу. Таким образом, формальная группа $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)$ над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6]$ не является порождающей, но $\mathcal{R}_{\mathrm{T}}\otimes\mathbb{Z}_p=\mathbb{Z}_p[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6]$ для любого простого $p>3$.

Естественно возникает задача описать кольцо коэффициентов $\mathcal{R}_{\mathrm{T}}\subset\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6]$ формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)$. Ясно, что кольцо $\mathcal{R}_{\mathrm{T}}$ совпадает с образом гомоморфизма, классифицирующего формальную группу $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)$. Ниже эта задача будет решена для формальных групп, играющих важную роль в алгебраической топологии (см. теорему 9.1).

Следствие 5.2 [3].

$$\frac{\partial}{\partial v}\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)\bigg|_{v=0}=1-\mu_1u-\mu_2u^2-2\mu_3s(u)-2\mu_4us(u)-3\mu_6s(u)^2.$$

Теорема 5.3 [3]. *Экспонента формальной группы Тейта $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)$ задается рядом $f_{\mathrm{T}}(t)\in\mathbb{Q}[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6][[t]]$ разложения при $t=0$ функции*

$$-2\frac{\wp(t)-\frac{1}{12}(4\mu_2+\mu_1^2)}{\wp'(t)-\mu_1\wp(t)+\frac{1}{12}\mu_1(4\mu_2+\mu_1^2)-\mu_3},\tag{5.7}$$

где выражения для параметров g_2, g_3 даны формулами (5.3).

Следствие 5.4.

$$f_{\mathrm{T}}(t)=t-\mu_1\frac{t^2}{2}+\left(\mu_1^2-2\mu_2\right)\frac{t^3}{3!}-\left(\mu_1^3-8\mu_1\mu_2+12\mu_3\right)\frac{t^4}{4!}+$$
$$+\left(\mu_1^4-22\mu_1^2\mu_2+16\mu_2^2+36\mu_1\mu_3-48\mu_4\right)\frac{t^5}{5!}+\dots.$$

6. РОД КРИЧЕВЕРА

Пусть Λ — решетка с образующими $2\omega_1,2\omega_2\in\mathbb{C}$, где $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$.

Функция Бейкера–Ахиезера задается выражением

$$\Phi(x,z)=\frac{\sigma(z-x)}{\sigma(x)\sigma(z)}e^{\zeta(z)x},\tag{6.1}$$

где $\sigma(x)$, $\zeta(x)$ — функции Вейерштрасса эллиптической кривой $\mathbb{C}/\Lambda$.

Следующие свойства однозначно определяют функцию $\Phi(x,z)$ как функцию переменной x:

- при $x=0$ имеет простой полюс;
- при $x=z$ имеет простой нуль;
- удовлетворяет следующим свойствам при сдвиге на периоды:

$$\Phi(x+2\omega_k,z)=\Phi(x,z)e^{2\zeta(z)\omega_k-2\zeta(\omega_k)z},\qquad k=1,2.\tag{6.2}$$

В работе [13] Кричевер ввел род Хирцебруха L_f, называемый теперь *родом Кричевера*, где

$$f(x)=f_{\mathrm{Kr}}(x)=\frac{\exp(\alpha x)}{\Phi(x,z)}=\frac{\sigma(x)\sigma(z)}{\sigma(z-x)}\exp(\alpha x-\zeta(z)x),\tag{6.3}$$

и показал, что он обладает важными алгебро-топологическими свойствами. Обратим внимание, что ряд $f_{\mathrm{Kr}}(x)$ зависит от четырех параметров: z, α, ω_1, ω_2. Параметры ω_1, ω_2 решетки Λ можно заменить на параметры эллиптической кривой (5.2), которую униформизируют

$\wp$-функции Вейерштрасса, соответствующие решетке Λ. Имеем $f_{\mathrm{Kr}}(x) \in \mathbb{Q}[\alpha, \wp(z), \wp'(z), g_2][[x]]$ (см. [3, 6]). А именно

$$f_{\mathrm{Kr}}(x) = x + \alpha x^2 + \left(\alpha^2 + \wp(z)\right)\frac{x^3}{2} + \left(\alpha^3 + 3\alpha\wp(z) - \wp'(z)\right)\frac{x^4}{3!} + \\ + \left(\alpha^4 + 6\alpha^2\wp(z) - 4\alpha\wp'(z) + 9\wp(z)^2 - \frac{3}{5}g_2\right)\frac{x^5}{4!} + \dots .$$

Понятие эллиптического рода уровня N было введено Ф. Хирцебрухом в [10] в связи с известной задачей алгебраической топологии. Для натурального N, решетки Λ и $z \in \mathbb{C}$ рассмотрим эллиптическую функцию $g(x)$ с дивизором $N \cdot 0 - N \cdot z$ и условием, что коэффициент при x^N в ее разложении в ряд в окрестности $x = 0$ равен 1. Из теории эллиптических функций следует, что такая функция $g(x)$ существует и единственна при данных (N, Λ, z) таких, что $z \notin \Lambda$, $Nz \in \Lambda$, т.е. $N > 1$. Положим $f_N(x) = g(x)^{1/N}$ с условием, что $f'_N(0) = 1$. Род Хирцебруха для ряда функции $f_N(x)$ называется *эллиптическим родом уровня* N.

Эллиптический род уровня 2 задается эллиптическим синусом Якоби и представляет собой *род Ошанина–Виттена*.

Кричевер в [13] реализовал $f_N(x)$ в терминах функции Бейкера–Ахиезера (6.1), т.е. показал, что эллиптический род уровня N является специализацией рода Кричевера и задается условиями

$$z = 2\frac{n}{N}\omega_1 + 2\frac{m}{N}\omega_2, \qquad \alpha = -2\frac{n}{N}\zeta(\omega_1) - 2\frac{m}{N}\zeta(\omega_2) + \zeta(z),$$

$n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $(n, m) \neq (0, 0)$. Из (6.2) следует, что при сдвигах на период $2\omega_k$ функция $f_N(x)$ умножается на корень N-й степени из 1.

7. ФОРМАЛЬНАЯ ГРУППА БУХШТАБЕРА

Формальная группа $F(u, v)$ над кольцом R называется *формальной группой Бухштабера*, если ее можно представить в виде

$$F(u, v) = \frac{u^2 A(v) - v^2 A(u)}{uB(v) - vB(u)}, \tag{7.1}$$

где

$$A(u) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i u^i, \quad a_i \in R, \qquad B(u) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i u^i, \quad b_i \in R.$$

Формальные группы вида (7.1) введены в [1].

Приведем конструкцию универсальной формальной группы Бухштабера.

Формальная группа вида (7.1) над кольцом R задается своими коэффициентами $a_k \in R$, $k \neq 2$, и $b_m \in R$, $m \neq 1$. Обозначим через $\mathcal{F}_{\mathrm{B}}(u, v)$ формальную группу (7.1) над кольцом $\mathcal{R}_{\mathrm{B}} = \mathbb{Z}[a_k,\, k \neq 2,\, b_m,\, m \neq 1]/J$, где J — идеал ассоциативности. Ее коэффициенты $a_{i,j}$ (см. (2.1)) удовлетворяют соотношениям (см. [7, формулы (19)])

$$\begin{aligned} &a_{1,1} \equiv a_1, \\ &a_{i,1} \equiv a_{1,i} \equiv b_i, \qquad i > 1, \\ &a_{i,j} \equiv a_{j,i} \equiv 2b_{i+j-1} - a_{i+j-1}, \qquad i, j > 1 \end{aligned} \tag{7.2}$$

(здесь и далее все сравнения рассматриваются по модулю идеала I^2); таким образом, формальная группа $\mathcal{F}_{\mathrm{B}}(u, v)$ над кольцом $\mathcal{R}_{\mathrm{B}}$ является порождающей. Следовательно, для любой формальной группы вида (7.1) над кольцом R классифицирующий гомоморфизм $h\colon \mathcal{R}_{\mathrm{U}} \to R$ разлагается в композицию с кольцевым гомоморфизмом $\mathcal{R}_{\mathrm{B}} \to R$, т.е. формальная группа $\mathcal{F}_{\mathrm{B}}(u,v)$ над кольцом $\mathcal{R}_{\mathrm{B}}$ является универсальной формальной группой вида (7.1).

Теорема 7.1 [7]. *Кольцо $\mathcal{R}_{\mathrm{B}}$ мультипликативно порождено элементами $h_{\mathrm{B}}(e_n)$, где $n = 1,2,3,4$ и $n = p^r$ с $r \geq 1$ и p, пробегающим все простые числа, а также $n = 2^k - 2$ с $k > 2$. При этом*

$$\rho_{\mathrm{B}}(n) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n = 1,2,3,4, \\ p, & \text{если } n = p^r,\ n \neq 2,3,4,\ r \geq 1, \\ 2, & \text{если } n = 2^k - 2,\ k \geq 3, \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(*см. определение* 3.4). *Кольцо $\mathcal{R}_{\mathrm{B}}$ имеет только 2-кручение. В кольце $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$ существуют мультипликативные образующие e_{2^k-2}, $k > 2$, такие, что $h_{\mathrm{B}}(e_{2^k-2})$ порождают в $\mathcal{R}_{\mathrm{B}}$ идеал элементов порядка 2.*

В [1] показано, что экспонента формальной группы $\mathcal{F}_{\mathrm{B}}(u,v)$ задается формулой (6.3). Таким образом, универсальная формальная группа вида (7.1) задает род Кричевера.

Далее мы опишем универсальную формальную группу вида (7.1) с условием $F(u,u) = 0$ над кольцом с 2-кручением и покажем, что она задает новый род Хирцебруха.

8. КОЛЬЦО КОЭФФИЦИЕНТОВ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ БУХШТАБЕРА ПРИ УСЛОВИИ $A(u) = B(u)$

Теорема 8.1 [7, теорема 7.1]. *Кольцо коэффициентов $\mathcal{S}_1$ универсальной формальной группы вида*

$$\mathscr{F}_1(u,v) = \frac{u^2A(v) - v^2A(u)}{uA(v) - vA(u)}, \tag{8.1}$$

где

$$A(u) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i u^i, \qquad a_i \in R,$$

мультипликативно порождено элементами ϵ_n, где $n = 1$ и $n = 2^r - 2$, $r \geq 2$. При этом

$$\rho_1(n) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n = 1,2, \\ 2, & \text{если } n = 2^k - 2,\ k \geq 3, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В размерностях $n = 2^k - 2$, $k \geq 3$, образующие e_n кольца $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$ можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства $2h_1(e_n) = 0$.

Теорема 8.2. *Кольцо коэффициентов $\mathcal{S}_1$ универсальной формальной группы вида* (8.1) *имеет вид $\mathbb{Z}[a_1, a_2, a_6, a_{14}, \ldots]/J$, где идеал J порождается соотношениями*

$$2a_{2^k-2} = 0, \qquad k \geq 3, \tag{8.2}$$

$$a_1 a_{2^k-2} = 0, \qquad k \geq 3. \tag{8.3}$$

В частности, при дополнительном условии $a_1 = 0$ идеал J порождается соотношениями (8.2).

Доказательство. Положим $\mathscr{N}(u,v,w) = \mathscr{F}_1(\mathscr{F}_1(u,v),w) - \mathscr{F}_1(u,\mathscr{F}_1(v,w))$. Так как коэффициент при vw в ряде $\mathscr{N}(u,v,w)$ равен

$$A(u)\left(\frac{2}{u}(A(u)-1) - a_1 - A'(u)\right)$$

и $A(0)=1$, то в кольце $\mathcal{S}_1$ выполняется равенство

$$A'(u) = \frac{2}{u}(A(u)-1) - a_1. \tag{8.4}$$

Подставляя его в выражение для коэффициента при vw^2 в ряде $\mathscr{N}(u,v,w)$, приходим к соотношению

$$2\frac{A(u)}{u^2}\bigl(A(u) - 1 - a_1u - a_2u^2\bigr) = 0,$$

из которого следует, что

$$2A(u) = 2(1 + a_1u + a_2u^2). \tag{8.5}$$

Значит, в кольце $\mathcal{S}_1$ выполняются соотношения $2a_k = 0$ $(k \geq 3)$ и, в частности, соотношения (8.2).

Из (8.4) и (8.5) вытекает, что

$$A'(u) = a_1 + 2a_2u. \tag{8.6}$$

Следовательно, $a_{2l+1} = 0$, $l \geq 1$. Из формулы (8.6) и выражения для коэффициента при v^2w в ряде $\mathscr{N}(u,v,w)$ получаем равенство

$$u^2\frac{A''(u)}{2} = A(u) - 1 - a_1u. \tag{8.7}$$

Следовательно, $a_{4s} = 0$, $s \geq 1$. Из (8.6) и (8.7) получаем, что выражение для коэффициента при v^2w^2 в уравнении $\mathscr{N}(u,v,w) = 0$ дает равенство

$$\frac{A(u)}{u}\bigl(2 - 8A(u) + 3a_1u\bigr)\bigl(1 + a_1u + a_2u^2 - A(u)\bigr) = 0. \tag{8.8}$$

В полученном равенстве последний сомножитель имеет вид $-(a_3u^3 + a_4u^4 + \ldots)$. Поэтому из соотношений (8.2) следует, что формула (8.8) равносильна равенству

$$a_1(a_3u^3 + a_4u^4 + \ldots) = 0,$$

из которого следуют соотношения (8.3).

Если в идеале ассоциативности есть соотношение, которое не следует из (8.2) и (8.3), то такое соотношение не может содержать a_1 (a_1 и a_2 входят в кольцо $\mathcal{S}_1$ свободно, поэтому соотношение не может содержать слагаемые, зависящие только от a_1 и a_2, и, кроме того, $a_1a_k = 0$ при $k > 2$). Так как кольцо $\mathcal{S}_1$ содержит подкольцо $\mathbb{F}_2[a_2, a_6, a_{14}, \ldots]$ (см. следствие 15.2), то согласно теореме 8.1 соотношение должно иметь вид $2P(a_2, a_6, a_{14}, \ldots) = 0$. Из (8.2) следует, что такое соотношение приводится к виду $2a_2^m = 0$, что невозможно из-за того, что a_2 входит в кольцо свободно. $\square$

9. СПЕЦИАЛИЗАЦИИ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ ТЕЙТА, ЗАДАЮЩИЕ ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ БУХШТАБЕРА

В этом разделе мы опишем все формальные группы Тейта над кольцами без делителей нуля, которые задают формальные группы Бухштабера. В лемме 9.3 мы опишем идеал $\mathcal{J}$ в кольце $\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6]$ такой, что если специализация формальной группы Тейта является формальной группой Бухштабера, то ее идеал специализации $\mathcal{I}$ содержит $\mathcal{J}$. В лемме 9.5 мы найдем все минимальные простые идеалы $\mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, содержащие $\mathcal{J}$. В леммах 9.6–9.9 мы покажем, что формальные группы Тейта над кольцами $\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6]/\mathcal{I}_k$ являются формальными группами Бухштабера. Таким образом, в данном разделе мы докажем следующую теорему.

Теорема 9.1 (ср. [3]). *Специализация формальной группы Тейта над кольцом без делителей нуля задает формальную группу Бухштабера тогда и только тогда, когда ее идеал специализации $\mathcal{I}$ содержит хотя бы один из идеалов*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_1 = \{\mu_3 = 0,\ \mu_4 = 0,\ \mu_6 = 0\},\\
&\mathcal{I}_2 = \{\mu_1 = 0,\ \mu_3 = 0,\ \mu_6 = 0\},\\
&\mathcal{I}_3 = \{\mu_1^2 + \mu_2 = 0,\ \mu_1\mu_3 + \mu_4 = 0,\ \mu_3^2 + 3\mu_6 = 0\},\\
&\mathcal{I}_4 = \{2 = 0,\ \mu_1 = 0,\ \mu_3 = 0\}.
\end{aligned}$$

Лемма 9.2. *Пусть специализация формальной группы Тейта является формальной группой Бухштабера. Тогда*

$$\begin{aligned}
A(u) = 1 - \mu_1 u + a_2 u^2 - \mu_3 s(u) + (\mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_4)u^2 s(u) +&\\
+ (\mu_3^2 + 3\mu_6)s(u)^2 + (\mu_3\mu_4 - 3\mu_1\mu_6)us(u)^2,&\qquad (9.1)\\
B(u) = 1 + b_1 u - \mu_2 u^2 - 2\mu_3 s(u) - 2\mu_4 us(u) - 3\mu_6 s(u)^2.&
\end{aligned}$$

Доказательство. Согласно следствию 5.2

$$\frac{\partial}{\partial v}\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u, v)\Big|_{v=0} = 1 - \mu_1 u - \mu_2 u^2 - 2\mu_3 s(u) - 2\mu_4 us(u) - 3\mu_6 s(u)^2.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial v}\mathcal{F}_{\mathrm{B}}(u, v)\Big|_{v=0} = B(u) - b_1 u + a_1 u. \qquad (9.2)$$

Таким образом, в условиях леммы получаем $a_1 = -\mu_1$ и

$$B(u) = 1 + b_1 u - \mu_2 u^2 - 2\mu_3 s(u) - 2\mu_4 us(u) - 3\mu_6 s(u)^2.$$

Для формальной группы $F(u, v)$ рассмотрим выражение

$$\left(-\frac{u}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}F(u, v) + \left(\frac{\partial}{\partial v}F(u, v)\right)^2 - ku\frac{\partial}{\partial v}F(u, v)\right)\Big|_{v=0}, \qquad (9.3)$$

где $k = \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}F(u, v)\big|_{u=0,\,v=0}$. Поскольку оператор $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dv^2}$ задает гомоморфизм $\mathbb{Z}[[v]] \to \mathbb{Z}[[v]]$, выражение (9.3) для ряда $F(u, v) \in R[[u, v]]$ задает ряд из $R[[u]]$. Для $F(u, v) = \mathcal{F}_{\mathrm{B}}(u, v)$ этот ряд равен

$$A(u) - a_2 u^2 + b_2 u^2.$$

Для $F(u,v)=\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)$ из вида (5.5), учитывая условия $s(0)=0$, $s'(0)=0$, $s''(0)=0$, получаем, что этот ряд равен

$$1-\mu_1u-\mu_2u^2-\mu_3s(u)+\mu_4u\bigl(u^3-s(u)+\mu_2u^2s(u)+2\mu_3s(u)^2+\mu_4us(u)^2+\mu_6s(u)^3\bigr)+$$
$$+\mu_2\mu_3u^2s(u)+\mu_3^2s(u)^2+3\mu_6s(u)\bigl(u^3+\mu_2u^2s(u)+\mu_3s(u)^2+\mu_4us(u)^2+\mu_6s(u)^3\bigr).$$

С учетом соотношения (5.4)

$$s(u)=u^3+\mu_1us(u)+\mu_2u^2s(u)+\mu_3s(u)^2+\mu_4us(u)^2+\mu_6s(u)^3$$

этот ряд принимает вид

$$1-\mu_1u-\mu_2u^2-\mu_3s(u)+(\mu_2\mu_3-\mu_1\mu_4)u^2s(u)+(\mu_3^2+3\mu_6)s(u)^2+(\mu_3\mu_4-3\mu_1\mu_6)us(u)^2.$$

Таким образом, в условиях леммы мы получаем вид ряда $A(u)$. $\square$

Лемма 9.3. *Обозначим через $\mathcal{J}$ идеал, порожденный соотношениями*

$$\mu_2\mu_3-\mu_1\mu_4=0,\qquad 2(\mu_3^2+3\mu_6)=0,$$
$$\mu_1(\mu_3^2+3\mu_6)=0,\qquad \mu_3(\mu_1\mu_3+\mu_4)=0,$$
$$4\mu_6(\mu_1^2+\mu_2)=0,\qquad \mu_3(\mu_3^2+3\mu_6)=0,$$
$$2\mu_6(\mu_1^2\mu_2+\mu_2^2+\mu_1\mu_3+\mu_4)=0,\qquad 2\mu_6(\mu_1^2+\mu_2)^2=0.$$

Пусть специализация формальной группы Тейта является формальной группой Бухштабера. Тогда идеал специализации $\mathcal{I}$ содержит идеал $\mathcal{J}$.

Замечание 9.4. Иначе говоря, любая специализация формальной группы Тейта, задающая формальную группу Бухштабера, является специализацией формальной группы Тейта над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_6]/\mathcal{J}$, где идеал $\mathcal{J}$ задается соотношениями леммы 9.3.

Доказательство леммы 9.3. Рассмотрим формальный ряд $F(u,v)$ вида (7.1), где $A(u)$ и $B(u)$ определены соотношениями (9.1) для $s(u)$, заданного соотношением (5.4). Рассмотрим ряд $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)-F(u,v)=\sum_{i,j}\gamma_{i,j}u^iv^j$, где $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)$ задан формулой (5.5). Из леммы 9.2 следует, что для того, чтобы формальная группа $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,v)$ являлась формальной группой Бухштабера, необходимо выполнение соотношений $\gamma_{i,j}=0$ для всех i, j.

Используя рекурсию для коэффициентов ряда $s(u)$, заданную уравнением (5.4), получаем разложение

$$s(u)=u^3+\mu_1u^4+\bigl(\mu_1^2+\mu_2\bigr)u^5+\bigl(\mu_1^3+2\mu_1\mu_2+\mu_3\bigr)u^6+\bigl(\mu_1^4+3\mu_1^2\mu_2+\mu_2^2+3\mu_1\mu_3+\mu_4\bigr)u^7+$$
$$+\bigl(\mu_1^5+4\mu_1^3\mu_2+3\mu_1\mu_2^2+6\mu_1^2\mu_3+3\mu_2\mu_3+3\mu_1\mu_4\bigr)u^8+$$
$$+\bigl(\mu_1^6+5\mu_1^4\mu_2+6\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^3+10\mu_1^3\mu_3+12\mu_1\mu_2\mu_3+2\mu_3^2+6\mu_1^2\mu_4+3\mu_2\mu_4+\mu_6\bigr)u^9+\dots.\tag{9.4}$$

Подставляя коэффициенты ряда $s(u)$ из (9.4) в соотношения $\gamma_{i,j}=0$ при $i+j\le 11$, получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 9.5. *Пусть $\mathcal{I}$ — простой идеал, содержащий $\mathcal{J}$. Тогда $\mathcal{I}\supset\mathcal{I}_k$ для одного из простых идеалов $\mathcal{I}_k$ (см. теорему 9.1).*

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $\mu_1=0$, $\mu_3=0$. Соотношения леммы 9.3 в кольце R без делителей нуля примут вид

$$6\mu_6=0,\qquad 4\mu_2\mu_6=0,\qquad 2\mu_6(\mu_2^2+\mu_4)=0,\qquad 2\mu_2^2\mu_6=0,$$

откуда либо $\mu_6=0$ и $\mathcal{I}\supset\mathcal{I}_2$, либо $2=0$ и $\mathcal{I}\supset\mathcal{I}_4$, либо $\mu_2=\mu_4=3=0$ и $\mathcal{I}\supset\mathcal{I}_3$.

2. Пусть $\mu_1 \neq 0$, $\mu_3 = 0$. Соотношения леммы 9.3 в кольце R без делителей нуля примут вид

$$\mu_4 = 0, \qquad 3\mu_6 = 0, \qquad \mu_6(\mu_1^2 + \mu_2) = 0,$$

откуда либо $\mu_6 = 0$ и $\mathcal{I} \supset \mathcal{I}_1$, либо $\mu_1^2 + \mu_2 = 0$ и $\mathcal{I} \supset \mathcal{I}_3$.

3. Пусть $\mu_3 \neq 0$. Среди соотношений леммы 9.3 в кольце R без делителей нуля будут соотношения

$$\mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_4 = 0, \qquad \mu_1\mu_3 + \mu_4 = 0, \qquad \mu_3^2 + 3\mu_6 = 0;$$

из двух первых соотношений получаем $\mu_1^2 + \mu_2 = 0$, и, таким образом, $\mathcal{I} \supset \mathcal{I}_3$. $\square$

Лемма 9.6. *Специализация формальной группы Тейта с идеалом специализации $\mathcal{I}_1$ определена над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2]$ и имеет вид*

$$\mathcal{F}_1(u,v) = \frac{u + v - \mu_1 uv}{1 + \mu_2 uv}. \tag{9.5}$$

Она представляется в виде (7.1) *с $A(u) = B(u) = 1 - \mu_1 u - \mu_2 u^2$. Эта формальная группа задает двупараметрический род Тодда.*

Лемма 9.7. *Специализация формальной группы Тейта с идеалом специализации $\mathcal{I}_2$ определена над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_2, \mu_4]$ и имеет вид*

$$\mathcal{F}_2(u,v) = \frac{u\sqrt{1 - 2\delta v^2 + \varepsilon v^4} + v\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}}{1 - \varepsilon u^2 v^2}, \tag{9.6}$$

где $\delta = \mu_2$ и $\varepsilon = \mu_2^2 - 4\mu_4$. Эта специализация представляется в виде (7.1) *с $A(u) = 1$, $B(u) = \sqrt{(1 - \mu_2 u^2)^2 - 4\mu_4 u^4}$. Заметим, что $B(u) = 1 - \mu_2 u^2 - 2\mu_4 u^4 - 2\mu_2\mu_4 u^6 + \ldots \in \mathbb{Z}[\mu_2, \mu_4][[u]]$. Эта формальная группа задает эллиптический род Оханина–Виттена.*

Лемма 9.8. *Специализация формальной группы Тейта с идеалом специализации $\mathcal{I}_3$ определена над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_3, \mu_6]/\{3\mu_6 = -\mu_3^2\}$ и имеет вид*

$$\mathcal{F}_3(u,v) = \frac{u^2(1 - \mu_1 v - \mu_3 s(v)) - v^2(1 - \mu_1 u - \mu_3 s(u))}{u(1 - \mu_1 v - \mu_3 s(v))^2 - v(1 - \mu_1 u - \mu_3 s(u))^2}, \tag{9.7}$$

где $s(u) = u^3 + \ldots$ задается уравнением

$$s(u) = u^3 + \mu_1 u s(u) - \mu_1^2 u^2 s(u) + \mu_3 s(u)^2 - \mu_1\mu_3 u s(u)^2 + \mu_6 s(u)^3.$$

Она представляется в виде (7.1) *с $A(u) = 1 - \mu_1 u - \mu_3 s(u)$, $B(u) = A(u)^2$. Эта формальная группа задает эллиптический род уровня* 3.

Доказательство лемм 9.6–9.8. В [3] показано, что формальная группа Тейта при условии выполнения соотношений хотя бы одного из идеалов $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ является формальной группой Кричевера, т.е. представляется в виде специализации *универсальной формальной группы Кричевера*

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Kr}}(u,v) = ub(v) + vb(u) - b'(0)uv + \frac{b(u)\beta(u) - b(v)\beta(v)}{(ub(v) - vb(u))}u^2v^2, \tag{9.8}$$

где $b(u) = 1 + \sum b_i u^i$, $\beta(u) = (b'(u) - b'(0))/(2u)$, $b_1 = \chi_1$, $b_{2i} = \chi_{2i}$ и $b_{2i+1} = 2\chi_{2i+1}$, над кольцом $\mathcal{B} = \mathbb{Z}[\chi_k\colon k = 1, 2, \ldots]/J$, где J — идеал ассоциативности. Формальная группа (9.8) является формальной группой Бухштабера с $B(u) = b(u)$ и

$$A(u) = b(u)^2 - b'(0)ub(u) - u^2 b(u)\beta(u).$$

Следовательно, формальная группа Тейта при условии выполнения соотношений хотя бы одного из идеалов $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ является формальной группой Бухштабера. По лемме 9.2, подбирая значения для a_2 и b_1, получаем значения для $A(u)$ и $B(u)$, заданные в леммах. В случае леммы 9.7 мы получаем $B(u) = 1 - \mu_2 u^2 - 2\mu_4 us(u)$ и дополнительно используем соотношение (5.4), принимающее вид $s(u) = u^3 + \mu_2 u^2 s(u) + \mu_4 us(u)^2$, откуда вытекает приведенное соотношение для $B(u)^2$.

Для леммы 9.6 получаем выражение для формальной группы, задающей двупараметрический род Тодда:

$$\mathcal{F}_1(u,v) = \frac{u^2(1-\mu_1 v) - v^2(1-\mu_1 u)}{u(1-\mu_2 v^2) - v(1-\mu_2 u^2)}.$$

Равенство этого выражения и его более известной формы (9.5) проверяется прямым вычислением.

Для леммы 9.7 подстановкой значений δ, ε из леммы получаем выражение для формальной группы, задающей эллиптический род Оханина–Виттена:

$$\mathcal{F}_1(u,v) = \frac{u^2 - v^2}{u\sqrt{1-2\delta v^2 + \varepsilon v^4} - v\sqrt{1-2\delta u^2 + \varepsilon u^4}}.$$

Равенство этого выражения и его более известной формы (9.6) проверяется прямым вычислением.

Для леммы 9.8 мы получаем выражение (9.7). Как следует из [4], формальная группа Тейта с соотношениями $\mathcal{I}_3$ задает эллиптический род уровня 3. $\square$

Лемма 9.9. *Специализация формальной группы Тейта с идеалом специализации $\mathcal{I}_4$ определена над кольцом $\mathbb{F}_2[\mu_2, \mu_4, \mu_6]$ и имеет вид*

$$\mathcal{F}_4(u,v) = \frac{u^2(1+\mu_6 s(v)^2) + v^2(1+\mu_6 s(u)^2)}{u(1+\mu_2 v^2 + \mu_6 s(v)^2) + v(1+\mu_2 u^2 + \mu_6 s(u)^2)}, \tag{9.9}$$

где $s(u) = u^3 + \dots$ задается уравнением $s(u) = u^3 + \mu_2 u^2 s(u) + \mu_4 us(u)^2 + \mu_6 s(u)^3$. Она представляется в виде (7.1) с $A(u) = B(u) = 1 + \mu_2 u^2 + \mu_6 s(u)^2$.

Доказательство. В лемме 9.2 в условиях леммы 9.9 имеем

$$A(u) = 1 + a_2 u^2 + \mu_6 s(u)^2, \qquad B(u) = 1 + b_1 u + \mu_2 u^2 + \mu_6 s(u)^2,$$

откуда, положив $b_1 = 0$, $a_2 = \mu_2$, получаем $A(u) = B(u) = 1 + \mu_2 u^2 + \mu_6 s(u)^2$.

Таким образом, мы получили выражение (9.9). Теперь докажем, что эта формальная группа является специализацией формальной группы Тейта. Имеем

$$\mathcal{F}_4(u,v) = u + v + \frac{(uv(u^2+v^2))\left(\mu_2 + \mu_6 \frac{s(u)^2 + s(v)^2}{u^2+v^2}\right)}{u + v + \mu_2 uv(u+v) + \mu_6(us(v)^2 + s(u)^2 v)}.$$

Согласно [3] при $\mu_1 = 0$, $\mu_3 = 0$ формальная группа Тейта над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_2, \mu_4, \mu_6]$ принимает вид

$$F_{\mathrm{T}}(u,v) = u + v + k\frac{\mu_2 + 2\mu_4 m + 3\mu_6 m^2}{1 + \mu_2 m + \mu_4 m^2 + \mu_6 m^3},$$

где выражения для m и k даны в теореме 5.1, и уравнение (5.4) принимает вид

$$s(u) = u^3 + \mu_2 u^2 s(u) + \mu_4 us(u)^2 + \mu_6 s(u)^3. \tag{9.10}$$

Над $\mathbb{F}_2[\mu_2,\mu_4,\mu_6]$ получаем

$$F_{\mathrm{T}}(u,v)=u+v+\frac{(us(v)+vs(u))\Bigl(\mu_2+\mu_6\frac{s(u)^2+s(v)^2}{u^2+v^2}\Bigr)}{u+v+\mu_2(s(u)+s(v))+\mu_4\frac{s(u)^2+s(v)^2}{u+v}+\mu_6\frac{(s(u)+s(v))^3}{u^2+v^2}}.$$

Таким образом, условие $\mathcal{F}_4(u,v)=F_{\mathrm{T}}(u,v)$ равносильно соотношению

$$uv(u^2+v^2)\biggl(u+v+\mu_2(s(u)+s(v))+\mu_4\frac{s(u)^2+s(v)^2}{u+v}+\mu_6\frac{(s(u)+s(v))^3}{u^2+v^2}\biggr)=$$
$$=(us(v)+vs(u))\Bigl(u+v+\mu_2uv(u+v)+\mu_6(us(v)^2+s(u)^2v)\Bigr).$$

Исключая из этого уравнения μ_4 при помощи соотношения (9.10), получаем тождественное равенство. $\square$

10. КОЛЬЦО КОЭФФИЦИЕНТОВ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ, ЗАДАЮЩЕЙ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РОД ТОДДА

Рассмотрим формальную группу (9.5)

$$\mathcal{F}_1(u,v)=\frac{u+v-\mu_1uv}{1+\mu_2uv}.$$

Она определена над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_2]$. Поскольку

$$\mathcal{F}_1(u,v)=u+v-\mu_1uv-\mu_2uv(u+v)+\ldots, \tag{10.1}$$

формальная группа (9.5) над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_2]$ является порождающей.

Формальная группа (9.5) является специализацией формальной группы Бухштабера с $A(u)=B(u)=1-\mu_1u-\mu_2u^2$.

Следствие 10.1 (из теоремы 8.1)**.** *Над кольцами R без 2-кручений универсальной формальной группой вида* (8.1) *является формальная группа* (9.5) *над кольцом* $\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_2]$.

Доказательство. Над кольцами без 2-кручений в теореме 8.1 имеем $h_1(e_n)=0$ для $n=2^k-2$, $k\geq 3$, т.е. кольцо коэффициентов $\widehat{\mathcal{S}}_1$ универсальной формальной группы вида (8.1) над кольцами R без 2-кручений порождено двумя образующими ϵ_1 и ϵ_2. Рассмотрим кольцевой гомоморфизм $h_1^{\mathrm{V}}\colon\widehat{\mathcal{S}}_1\to\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_2]$, классифицирующий формальную группу (9.5) как группу вида (8.1) над кольцами R без 2-кручений. Из (3.3) имеем $\epsilon_1=a_{1,1}$, $\epsilon_2=a_{1,2}$ и из (10.1) получаем $h_1^{\mathrm{V}}(\epsilon_1)=-\mu_1$, $h_1^{\mathrm{V}}(\epsilon_2)=-\mu_2$.

Следовательно, h_1^{V} задает изоморфизм $\widehat{\mathcal{S}}_1\cong\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_2]$. $\square$

11. КОЛЬЦО КОЭФФИЦИЕНТОВ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ, ЗАДАЮЩЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ РОД УРОВНЯ 2 (РОД ОШАНИНА–ВИТТЕНА)

Формальную группу (9.6) над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_2,\mu_4]$ можно записать в виде

$$\mathcal{F}_2(u,v)=\frac{u^2-v^2}{u\sqrt{(1-\mu_2v^2)^2-4\mu_4v^4}-v\sqrt{(1-\mu_2u^2)^2-4\mu_4u^4}}.$$

Она является специализацией формальной группы Бухштабера с $A(u)=1$ и рядом

$$B(u)=1-\mu_2u^2-2\mu_4u^4-2\mu_2\mu_4u^6-2\mu_4(\mu_2^2+\mu_4)u^8+\ldots\in\mathbb{Z}[\mu_2,\mu_4][[u]], \tag{11.1}$$

заданным условием $B(u)^2 = (1-\mu_2 u^2)^2 - 4\mu_4 u^4$. Поскольку

$$\mathcal{F}_2(u,v) = u + v - \mu_2 uv(u+v) + \mu_2^2 u^2 v^2 (u+v) - 2\mu_4 uv(u+v)(u^2+uv+v^2) + \dots, \qquad (11.2)$$

формальная группа (9.6) над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_2,\mu_4]$ не является порождающей. Ее кольцо коэффициентов $\mathcal{R}_2$ является подкольцом в $\mathbb{Z}[\mu_2,\mu_4]$. Далее мы опишем кольцо $\mathcal{R}_2$.

Рассмотрим универсальную формальную группу вида

$$\mathscr{F}_2(u,v) = \frac{u^2 - v^2}{uB(v) - vB(u)}, \qquad (11.3)$$

где

$$B(x) = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} b_i x^i, \qquad b_i \in R.$$

Обозначим через $\mathcal{S}_2$ кольцо ее коэффициентов.

Лемма 11.1.

$$\mathcal{S}_2 = \mathbb{Z}[b_2, b_3, b_4, \dots]/J,$$

где J — идеал ассоциативности.

Доказательство. Формальная группа вида (11.3) над кольцом R однозначно задается своими коэффициентами $b_k \in R$. В случае формальной группы (11.3) из (7.2) получаем

$$a_{i,1} \equiv a_{1,i} \equiv b_i \mod I^2, \qquad i > 1,$$

следовательно, формальная группа (11.3) над кольцом $\mathbb{Z}[b_2, b_3, b_4, \dots]/J$ является порождающей. $\square$

Теорема 11.2 [7, теорема 8.2]. *Кольцо $\mathcal{S}_2$ мультипликативно порождено элементами ϵ_n, где $n = 2^k$, $k \geq 1$. При этом*

$$\rho_2(n) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n = 2,4, \\ 2, & \text{если } n = 2^k,\ k \geq 3, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кольцо $\mathcal{S}_2$ не имеет кручения.

Теорема 11.3. *Кольцевой гомоморфизм $h_2^{\mathrm{V}}\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{R}_2$, классифицирующий формальную группу* (9.6) *как группу вида* (11.3), *является изоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{R}_2 \subset \mathbb{Z}[\mu_2,\mu_4]$ является кольцом коэффициентов, h_2^{V} является эпиморфизмом. Покажем, что $h_2^{\mathrm{V}}\colon \mathcal{S}_2 \to \mathbb{Z}[\mu_2,\mu_4]$ является мономорфизмом. Из теоремы 11.2 получаем, что кольцо $\mathcal{S}_2 \otimes \mathbb{Q}$ мультипликативно порождено элементами ϵ_2 и ϵ_4. Из замечания 3.2 и формулы (11.2) имеем $h_2^{\mathrm{V}}(\epsilon_2) = -\mu_2$, $h_2^{\mathrm{V}}(\epsilon_4) = -2\mu_4$, следовательно, $\mathcal{S}_2 \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[\mu_2,\mu_4]$ является изоморфизмом. Из отсутствия кручения в $\mathcal{S}_2$ следует, что $\mathcal{S}_2 \to \mathbb{Z}[\mu_2,\mu_4]$ — мономорфизм. Это доказывает теорему. $\square$

Выберем образующие e_k в $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$ по лемме 3.1 для $\beta_k = b_k$.

Следствие 11.4. *Значение $h_2(e_k)$ равно коэффициенту при u^k ряда* (11.1). *В частности,* $h_2(e_2) = -\mu_2$, $h_2(e_4) = -2\mu_4$, $h_2(e_{2k+1}) = 0$.

12. КОЛЬЦО КОЭФФИЦИЕНТОВ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ, ЗАДАЮЩЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ РОД УРОВНЯ 3

Рассмотрим формальную группу (9.7)

$$\mathcal{F}_3(u,v)=\frac{u^2(1-\mu_1v-\mu_3s(v))-v^2(1-\mu_1u-\mu_3s(u))}{u(1-\mu_1v-\mu_3s(v))^2-v(1-\mu_1u-\mu_3s(u))^2}.$$

Она определена над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_3,\mu_6]/\{3\mu_6=-\mu_3^2\}$. Здесь $s(u)=u^3+\ldots$ задается уравнением

$$s(u)=u^3+\mu_1us(u)-\mu_1^2u^2s(u)+\mu_3s(u)^2-\mu_1\mu_3us(u)^2+\mu_6s(u)^3. \tag{12.1}$$

Формальная группа (9.7) является специализацией формальной группы Бухштабера (7.1) с $A(u)=1-\mu_1u-\mu_3s(u)$, $B(u)=A(u)^2$.

Начальные коэффициенты разложения формальной группы в ряд показывают, что над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_1,\mu_3,\mu_6]/\{3\mu_6=-\mu_3^2\}$ формальная группа не является порождающей, а именно μ_6 не принадлежит ее кольцу коэффициентов $\mathcal{R}_3$. Далее мы опишем кольцо $\mathcal{R}_3$.

Рассмотрим универсальную формальную группу вида

$$\mathscr{F}_3(u,v)=\frac{u^2C(v)-v^2C(u)}{uC(v)^2-vC(u)^2}, \tag{12.2}$$

где

$$C(u)=1+\sum_{i=1}^{\infty}c_iu^i,\qquad c_2=0,\quad c_i\in R. \tag{12.3}$$

Обозначим через $\mathcal{S}_3$ кольцо ее коэффициентов.

Лемма 12.1.

$$\mathcal{S}_3=\mathbb{Z}[c_1,c_3,c_4,\ldots]/J,$$

где J — идеал ассоциативности.

Доказательство. Формальная группа вида (12.2) над кольцом R однозначно задается своими коэффициентами $c_k\in R$, $k\neq 2$. В случае формальной группы (12.2) из (7.2) получаем

$$a_{1,1}\equiv c_1,\qquad a_{i,1}\equiv 2c_i\quad (i>1),\qquad a_{i,j}\equiv 3c_{i+j-1}\quad (i,j>1)\mod I^2, \tag{12.4}$$

и, поскольку $c_2=0$, формальная группа (12.2) над кольцом $\mathbb{Z}[c_1,c_3,c_4,\ldots]/J$ является порождающей. □

Теорема 12.2. *Кольцо $\mathcal{S}_3$ мультипликативно порождено элементами c_{3^r}, где $r\geq 0$. При этом*

$$\rho_3(n)=\begin{cases}\infty, & \text{если } n=1,3,\\ 3, & \text{если } n=3^r,\ r\geq 2,\\ 1 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. Образующие элементы e_n кольца Лазара $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$, определенные леммой 3.3, удовлетворяют соотношениям (см. [7, формула (63)])

$$\alpha_{i,j}\equiv\binom{n+1}{i}\frac{e_n}{d(n+1)}\mod I^2,\qquad i+j=n+1,$$

где $d(n)$ определено формулой (3.1). Отсюда, учитывая сравнения (12.4), получаем систему сравнений $\mod I^2$

$$\begin{aligned} h_3(e_1) &\equiv c_1, \\ \frac{n+1}{d(n+1)} h_3(e_n) &\equiv 2c_n, \qquad n > 1, \\ \binom{n+1}{i} \frac{h_3(e_n)}{d(n+1)} &\equiv 3c_n, \qquad 2 \le i \le n-1, \quad n \ge 3. \end{aligned} \tag{12.5}$$

В частности, при $n = 3$ имеем систему

$$2h_3(e_3) \equiv 2c_3, \qquad 3h_3(e_3) \equiv 3c_3,$$

из которой следует, что $h_3(e_3) \equiv c_3$. При $n = 4$ получается система

$$h_3(e_4) \equiv 2c_4, \qquad 2h_3(e_4) \equiv 3c_4,$$

из которой следует, что $h_3(e_4) \equiv c_4 \equiv 0$. Предположим теперь, что $n \ge 5$. Определим величину

$$\begin{aligned} D(n) &= \left(\binom{n+1}{3} - \binom{n+1}{2}, \binom{n+1}{4} - \binom{n+1}{3}, \dots, \binom{n+1}{n-1} - \binom{n+1}{n-2} \right) = \\ &= \left(\binom{n}{3} - \binom{n}{1}, \binom{n}{4} - \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-3} \right). \end{aligned}$$

Тогда (см. [7, теорема 7.9])

$$\frac{D(n)}{d(n+1)} = \begin{cases} d(n), & \text{если} \ \ n \ne 2^k - 2, \\ 2, & \text{если} \ \ n = 2^k - 2. \end{cases} \tag{12.6}$$

Вычитая друг из друга сравнения системы (12.5), приходим к эквивалентной системе

$$\frac{n+1}{d(n+1)} h_3(e_n) \equiv 2c_n, \qquad n \ge 3, \tag{12.7}$$

$$\frac{1}{d(n+1)} \left(\binom{n+1}{2} - \binom{n+1}{1} \right) h_3(e_n) \equiv c_n, \qquad n \ge 3, \tag{12.8}$$

$$\frac{1}{d(n+1)} \left(\binom{n+1}{i+1} - \binom{n+1}{i} \right) h_3(e_n) \equiv 0, \qquad 2 \le i \le n-1, \quad n \ge 3. \tag{12.9}$$

Вычитая из сравнения (12.7) удвоенное сравнение (12.8), дополнительно находим

$$\frac{(n+1)(n-3)}{d(n+1)} h_3(e_n) \equiv 0. \tag{12.10}$$

Из сравнений (12.9) следует, что

$$\frac{D(n)}{d(n+1)} h_3(e_n) \equiv 0. \tag{12.11}$$

Значит, согласно (12.6) имеем $h_3(e_n) \equiv 0$, за исключением, быть может, случаев, когда $n = p^r$ и $n = 2^{r_0} - 2$, где p — простое, $r \ge 1$, $r_0 \ge 3$.

В первом случае сравнение (12.11) означает, что $ph_3(e_{p^r}) \equiv 0$. Если $p \neq 3$, то число $(n+1)(n-3)$ не делится на p. Поэтому из (12.10) и условия $ph_3(e_{p^r}) \equiv 0$ следует, что $h_3(e_{p^r}) \equiv 0$. Если же $p = 3$, то сравнение (12.10) является следствием того, что $3h_3(e_{3^r}) \equiv 0$.

В оставшемся случае, когда $n = 2^{r_0} - 2$, $r_0 \geq 3$, сравнение (12.11) означает, что $2h_3(e_n) \equiv 0$. Рассматривая сравнение (12.10) по модулю 2, получаем $h_3(e_n) \equiv 0$. $\square$

Следствие 12.3. *Кольцо $\mathcal{S}_3 \otimes \mathbb{Q}$ мультипликативно порождается элементами $h_3(e_1)$ и $h_3(e_3)$. Более того, $\mathcal{S}_3 \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[c_1, c_3]$ (см. доказательство теоремы* 12.7*).*

Теорема 12.4. *Кольцо $\mathcal{S}_3$ не содержит элементов конечного порядка.*

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 12.5. *Кольцо $\mathcal{S}_3$ не содержит элементов порядка $p \neq 3$.*

Доказательство. Рассмотрим кольцевой гомоморфизм $\mathbb{Z}[c_1, c_3] \to \mathcal{S}_3$, где c_1 и c_3 — формальные переменные, переходящие в соответствующие коэффициенты ряда $C(u)$ над $\mathcal{S}_3$. По лемме 9.8 имеем классифицирующий кольцевой гомоморфизм $\mathcal{S}_3 \to \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_3, \mu_6]/\{\mu_3^2 = -3\mu_6\}$, при котором $c_1 \mapsto -\mu_1$, $c_3 \mapsto -\mu_3$. Из теоремы 12.2 получаем, что кольцевой гомоморфизм $\mathbb{Z}_p[c_1, c_3] \to \mathcal{S}_3 \otimes \mathbb{Z}_p$ является эпиморфизмом для простого $p \neq 3$. Так как он продолжается до изоморфизма $\mathbb{Z}_p[c_1, c_3] \to \mathbb{Z}_p[\mu_1, \mu_3]$, то и $\mathbb{Z}_p[c_1, c_3] \to \mathcal{S}_3 \otimes \mathbb{Z}_p$ является изоморфизмом.

Таким образом, в кольце $\mathcal{S}_3$ нет p-кручений при $p \neq 3$. $\square$

Лемма 12.6. *В кольце $\mathcal{S}_3$ мультипликативные образующие c_{3^r} связаны соотношением*

$$\xi(r)c_{3^r}^3 = 3\eta(r)c_{3^{r+1}} + P_r(c_1, c_3, c_{3^2}, \ldots, c_{3^r}), \qquad r \geq 1,$$

где $\xi(r)$, $\eta(r)$ — целые числа, взаимно простые с 3, и степень полинома P_r по переменной c_{3^r} меньше 3.

Доказательство. Приравнивая у выражения $\mathscr{F}_3(u, \mathscr{F}_3(v, w)) - \mathscr{F}_3(\mathscr{F}_3(u, v), w)$ коэффициент при vw к нулю, получаем уравнение

$$2\big(uC'(u)\big(c_1u - C(u)^2\big) - 2c_1uC(u) + C(u)^3 - 1\big) = 0. \tag{12.12}$$

Для проверки утверждения леммы достаточно приравнять к нулю коэффициент при $u^{3^{r+1}}$ в полученном равенстве. $\square$

Доказательство теоремы 12.4. Проверим, что в кольце $\mathcal{S}_3$ нет элементов третьего порядка. С одной стороны, из изоморфизма $\mathcal{S}_3 \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[c_1, c_3]$ следует, что группа $\mathcal{S}_3^{-2m} \otimes \mathbb{Q}$, состоящая из элементов градуировки $-2m$ кольца $\mathcal{S}_3 \otimes \mathbb{Q}$, порождена мономами $c_1^{m_1}c_3^{m_3}$, где

$$m_1 + 3m_3 = m, \tag{12.13}$$

и поэтому ее ранг равен числу решений уравнения (12.13) в целых неотрицательных числах. Значит, в группе $\mathcal{S}_3^{-2m} \otimes \mathbb{F}_3$ число образующих не меньше этого количества. С другой стороны, по лемме 12.6 все элементы группы $\mathcal{S}_3^{-2m} \otimes \mathbb{F}_3$ выражаются через мономы вида $c_1^{j_0}c_3^{j_1}c_{3^2}^{j_2}c_{3^3}^{j_3}\ldots$, где $j_0 \geq 0$, $0 \leq j_1, j_2, j_3, \ldots \leq 2$, $j_0 + 3j_1 + 3^2j_2 + 3^3j_3 + \ldots = m$. Количество таких мономов совпадает с числом решений уравнения (12.13). Поэтому кольцо $\mathcal{S}_3$ не может иметь 3-кручения. $\square$

Теорема 12.7. *Кольцевой гомоморфизм $h_3^{\mathrm{V}}\colon \mathcal{S}_3 \to \mathcal{R}_3$, классифицирующий формальную группу* (9.7) *как группу вида* (12.2)*, является изоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{S}_3$ — кольцо коэффициентов, h_3^{V} является эпиморфизмом. Покажем, что $h_3^{\mathrm{V}}\colon \mathcal{S}_3 \to \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_3, \mu_6]/\{\mu_3^2 = -3\mu_6\}$ является мономорфизмом. Из теоремы 12.2 вытекает, что кольцо $\mathcal{S}_3 \otimes \mathbb{Q}$ мультипликативно порождено элементами c_1 и c_3. Из выражения для $A(u)$ имеем $h_3^{\mathrm{V}}(c_1) = -\mu_1$, $h_2^{\mathrm{V}}(c_3) = -\mu_3$, следовательно, $\mathcal{S}_3 \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[\mu_1, \mu_3]$ является изоморфизмом. Из отсутствия кручений в $\mathcal{S}_3$ получаем, что $\mathcal{S}_3 \to \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_3, \mu_6]/\{\mu_3^2 = -3\mu_6\}$ — мономорфизм. Это доказывает теорему. $\square$

Выберем образующие e_k в $\mathcal{R}_{\mathrm{U}}$ по лемме 3.1 для $\beta_k = c_k$.

Следствие 12.8. *Значение $h_3(e_k)$ равно коэффициенту при u^k ряда $A(u) = 1 - \mu_1 u - \mu_3 s(u)$, где $s(u) = u^3 + \ldots$ задан уравнением* (12.1).

Следствие 12.9. *Ряд $C(u)$ удовлетворяет кубическому уравнению*

$$C(u)^3 - 3c_1 u C(u) - \bigl(1 + (c_1^3 + 3c_3)u^3\bigr) = 0. \qquad (12.14)$$

Доказательство. Подстановкой $C(u) = 1 - \mu_1 u - \mu_3 s(u)$, $c_1 = -\mu_1$, $c_3 = -\mu_3$, $3\mu_6 = -\mu_3^2$ в уравнение (12.14) мы получаем, что оно является следствием уравнения (12.1). $\square$

Следствие 12.10. *Функция $\omega(u)$, определяемая равенством*

$$\omega(u) = \frac{1}{g'(u)} = f'(g(u)) = \frac{\partial}{\partial v} F(u, v)\bigg|_{v=0} \in R[[u]],$$

удовлетворяет кубическому уравнению

$$\omega(u)^3 - 3c_1 u\, \omega(u)^2 = 1 + 2(3c_3 - c_1^3)u^3 + (3c_3 + c_1^3)^2 u^6. \qquad (12.15)$$

Доказательство. Из (9.2) для случая $A(u) = C(u)$, $B(u) = C(u)^2$, получаем

$$\omega(u) = C(u)^2 - c_1 u. \qquad (12.16)$$

При этой подстановке (12.15) следует из (12.14). $\square$

Следствие 12.11.

$$C(u)(\omega(u) - 2c_1 u) = 1 + (c_1^3 + 3c_3)u^3.$$

13. ЭКСПОНЕНТА ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ, ЗАДАЮЩЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ РОД УРОВНЯ 3

Из леммы 9.8 и теорем 12.7 и 5.3 вытекает

Теорема 13.1. *Формальная группа* (9.7) *задается своей экспонентой*

$$f(x) = -2\frac{\wp(x) + \frac{\mu_1^2}{4}}{\wp'(x) - \mu_1\wp(x) - \mu_3 - \frac{\mu_1^3}{4}}, \qquad (13.1)$$

где $\wp(x)$ и $\wp'(x)$ — функции Вейерштрасса с параметрами

$$g_2 = \frac{1}{4}\mu_1\bigl(3\mu_1^3 + 8\mu_3\bigr), \qquad g_3 = \frac{1}{24}\bigl(3\mu_1^6 + 12\mu_1^3\mu_3 + 8\mu_3^2\bigr).$$

Доказательство. Поскольку кольцо $\mathcal{R}_3$ не имеет кручений, экспонента задает формальную группу. Учитывая, что $\omega(u) = f'(g(u))$ и $c_1 = -\mu_1$, $c_3 = -\mu_3$, из (12.15) получаем дифференциальное уравнение для $f(x)$:

$$f'(x)^3 + 3\mu_1 f(x)\, f'(x)^2 = 1 + 2\bigl(\mu_1^3 - 3\mu_3\bigr) f(x)^3 + \bigl(3\mu_3 + \mu_1^3\bigr)^2 f(x)^6 \qquad (13.2)$$

с решением (13.1). $\square$

Решением уравнения (13.2) является эллиптическая функция уровня 3, которую, следовательно, можно записать в виде (13.1). Подробнее см. [4].

14. ФОРМАЛЬНАЯ ГРУППА БУХШТАБЕРА ПРИ УСЛОВИИ $B(u) = A(u)^2$

В этом разделе мы приводим результаты о ряде $C(u)$, основанные на виде формальной группы (12.2). Часть результатов этого раздела является также следствием результатов разд. 12, 13, в частности теоремы 12.7.

Теорема 14.1. *Для универсальной формальной группы вида* (12.2) *ряд* (12.3) *обладает следующими свойствами.*

1. *Ряд* $C(u)$ *удовлетворяет кубическому уравнению* (12.14).
2. $C(u) \in \mathbb{Z}[1/3][c_1, c_3]$.
3. $C(u) \in \mathbb{Z}[c_1, c_3, \widetilde{c}_6]/\{c_3^2 = 3\widetilde{c}_6\}$.
4. *Ряд* $C(u)$ *может быть записан в виде*

$$C(u) = C_0(u^3) + c_1 u C_1(u^3),$$

где $C_0(0) = 1$, $C_1(0) = 1$. *При этом функции*

$$Y_0(t) = C_0(t)^3 = 1 + c_3 t + 3c_1^3 c_3 t^2 + \ldots \in \mathbb{Z}[c_1, c_3][[t]],$$
$$Y_1(t) = t c_1^3 C_1(t)^3 = c_1^3 t - 3c_1^3 c_3 t^2 - \ldots \in \mathbb{Z}[c_1, c_3][[t]]$$

являются решениями квадратного уравнения

$$Y(t)^2 - \big(1 + (c_1^3 + 3c_3)t\big)Y(t) + t c_1^3 = 0; \qquad (14.1)$$

в частности, $C_0(t)C_1(t) = 1$.

Доказательство. 1. Пользуясь отсутствием 2- и 3-кручения, получаем, что заменой $q(u) = C(u)^3 - 3c_1 u C(u)$ формула (12.12) приводится к уравнению

$$q(u) - 1 = \frac{u}{3} q'(u)$$

с общим решением $q(u) = 1 + bu^3$. Следовательно,

$$C(u)^3 - 3c_1 u C(u) = 1 + bu^3.$$

Сравнивая коэффициенты при u^3 в двух частях полученного равенства, находим, что $b = c_1^3 + 3c_3$.

2. Приравнивая к нулю коэффициент при u^n в уравнении (12.14), получаем рекуррентное соотношение, из которого можно найти c_n:

$$3c_n + \sum_{\substack{0 \le i \le j \le k < n \\ i+j+k=n}} T(i,j,k) c_i c_j c_k - 3c_1 c_{n-1} = 0, \qquad n \ge 4, \qquad (14.2)$$

где

$$T(i,j,k) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = k, \\ 3, & \text{если } i = j < k \text{ или } i < j = k, \\ 6, & \text{если } i < j < k. \end{cases}$$

Выражая последовательно коэффициенты c_n через c_1 и c_3, находим, что $C(u) \in \mathbb{Z}[1/3][c_1, c_3]$.

3. Проверим по индукции, что для любого $n \ge 4$ коэффициент c_n представим в виде $c_n = c_3 P_{n-3}(c_1, c_3, \widetilde{c}_6)$, где P — полином с целыми коэффициентами. Для нахождения c_n будем

применять равенство (14.2). Если $n \neq 3m$, то для c_n получается нужная формула, поскольку все коэффициенты $T(i,j,k)$ делятся на 3 и по предположению индукции в произведении $c_ic_jc_k$ по крайней мере один из сомножителей имеет вид $c_3P(c_1,c_3,\widetilde{c}_6)$. Если же $n = 3m$, то среди коэффициентов $T(i,j,k)$ ровно один не кратен 3, а именно $T(m,m,m) = 1$. Так как $m > 1$, то соответствующее слагаемое имеет вид

$$c_m^3 = c_3^3P_{m-3}(c_1,c_3,\widetilde{c}_6)^3 = 3c_3\widetilde{c}_6P_{m-3}(c_1,c_3,\widetilde{c}_6).$$

Значит, и в этом случае для коэффициента c_n существует нужное представление.

4. Подставим в уравнение (12.14) ряд $C(u)$, записанный в виде

$$C(u) = X_0(u^3) + uX_1(u^3) + u^2X_2(u^3).$$

Приравнивая к нулю ряды, содержащие u в степенях вида $3n+1$ и $3n+2$, получим соответственно уравнения

$$X_0(u^3)^2X_1(u^3) + u^3X_1(u^3)^2X_2(u^3) + u^3X_2(u^3)^2X_0(u^3) = c_1X_0(u^3), \tag{14.3}$$

$$X_0(u^3)^2X_2(u^3) + X_1(u^3)^2X_0(u^3) + u^3X_2(u^3)^2X_1(u^3) = c_1X_1(u^3). \tag{14.4}$$

Складывая их с коэффициентами $X_1(u^3)$ и $-X_0(u^3)$, приходим к равенству

$$X_2(u^3)\big(u^3X_1(u^3)^3 - X_0(u^3)^3\big) = 0,$$

из которого следует, что $X_2(u) = 0$. При этом уравнения (14.3), (14.4) принимают вид

$$X_0(u^3)X_1(u^3) = c_1. \tag{14.5}$$

Объединим в один ряд все слагаемые в левой части равенства (12.14), содержащие переменную u в степенях вида $3n$. Приравнивая к нулю этот ряд, дополнительно получим уравнение

$$X_0(u^3)^3 + u^3X_1(u^3)^3 = u^3(c_1^3 + 3c_3) + 1. \tag{14.6}$$

Из (14.5) и (14.6) следует, что ряды $Y_0(t) = X_0(t)^3$ и $Y_1(t) = tX_1(t)^3$ удовлетворяют квадратному уравнению (14.1). Это ряды вида $Y(t) = y_0 + y_1t + y_2t^2 + \dots$, которые характеризуются своими начальными коэффициентами:

$$Y_0(t) = 1 + 3c_3t + \dots, \qquad Y_1(t) = c_1^3t + \dots .$$

Приравнивая к нулю коэффициент при t^n $(n \geq 2)$, стоящий в левой части равенства (14.1), получаем, что коэффициенты рядов $Y_0(t)$ и $Y_1(t)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\pm y_n = (c_1^3 + 3c_3)y_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} y_ky_{n-k}.$$

Следовательно, оба ряда $Y_0(t)$ и $Y_1(t)$, являющиеся решениями уравнения (14.1), имеют коэффициенты из кольца $\mathbb{Z}[c_1,c_3]$.

При $c_1 = 0$ уравнение (14.1) принимает вид

$$Y(t)\big(Y(t) - 1 - 3c_3t\big) = 0.$$

Следовательно, все коэффициенты ряда $Y_1(t)$ делятся на c_1^3, и, значит, корректно определен ряд $C_1(t) = (Y_1(t)/(tc_1^3))^{1/3}$. Полагая $C_0(t) = Y_0(t)^{1/3}$, получаем нужное представление для функции $C(u)$:

$$C(u) = X_0(u^3) + uX_1(u^3) = Y_0(u^3)^{1/3} + Y_1(u^3)^{1/3} = C_0(u^3) + c_1uC_1(u^3). \qquad \square$$

Следствие 14.2. $c_2 = c_5 = c_8 = \ldots = c_{3k+2} = \ldots = 0.$

15. КОЛЬЦО КОЭФФИЦИЕНТОВ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ БУХШТАБЕРА ПРИ УСЛОВИИ $F(u,u)=0$

Теорема 15.1. *Пусть $F(u,v)$ — формальная группа вида (7.1) над кольцом R без делителей нуля и $F(u,u)=0$. Тогда кольцо R является алгеброй над полем $\mathbb{F}_2$ и*

$$A(u)=B(u), \qquad a_{2k+1}=0, \quad a_{4k+4}=0, \quad k\geq 0.$$

Доказательство. Из условия $F(u,u)=0$ следует, что $2=0$. По правилу Лопиталя имеет место формула

$$F(u,u)=\frac{u(2A(u)-uA'(u))}{B(u)-uB'(u)}, \tag{15.1}$$

поэтому $a_{2k+1}=0$.

Введем обозначения $N(u,v,w)$ для выражения $F(F(u,v),w)-F(u,F(v,w))$ и d_2 для оператора $\mathbb{F}_2[[u]]\to\mathbb{F}_2[[u]]$, получающегося приведением по модулю 2 из оператора $\frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2}\colon \mathbb{Z}[[u]]\to \to\mathbb{Z}[[u]]$.

В этих обозначениях по модулю 2 коэффициент при vw в выражении $N(u,v,w)$ равен $B'(u)(B(u)+a_1u)$ и так как $B(0)=1$, то $B'(u)=0$. При этом коэффициент при v^2w в выражении $N(u,v,w)$ равен

$$\frac{B(u)}{u^2}\bigl(A(u)+u^2(a_2+b_2)+B(u)^2+u^2B(u)d_2(B(u))\bigr).$$

Поскольку коэффициент a_2 ряда $A(u)$ не влияет на вид закона (7.1), можно положить $a_2=b_2$. Получаем равенство

$$A(u)=B(u)\bigl(B(u)+u^2d_2(B(u))\bigr).$$

Приравнивая к нулю коэффициент при w в выражении $N(u,v,w)$, приходим к формуле

$$B(F(u,v))=\frac{B(u)B(v)F(u,v)}{vB(u)-uB(v)}. \tag{15.2}$$

Равенство

$$\bigl(B(u)+u^2d_2(B(u))\bigr)^2=1 \tag{15.3}$$

получается из (15.2) подстановкой $v=u$, поскольку по правилу Лопиталя

$$\frac{F(u,v)}{vB(u)-uB(v)}\bigg|_{v=u}=\left(\frac{B(u)+u^2d_2(B(u))}{B(u)}\right)^2.$$

Из разложения

$$\bigl(B(u)+u^2d_2(B(x))\bigr)^2=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_{4k}^2u^{4k}$$

ввиду отсутствия делителей нуля в кольце R получаем соотношения $b_{4k}=0$, $k\geq 1$, и $B(u)+ + u^2d_2(B(u))=1$. Таким образом,

$$A(u)=B(u). \quad \square$$

Следствие 15.2. *Кольцо $\mathcal{R}_{B,2}$ коэффициентов универсальной формальной группы Бухштабера при условии $F(u,u)=0$ изоморфно кольцу $\mathbb{F}_2[a_2,a_6,\dots,a_{2^k-2},\dots]$. Ее экспонента имеет вид $f(x)=x+\sum_{k\geq 2}a_{2^k-2}x^{2^k-1}$, и $A(u)=u/g(u)$, где $g(u)$ — логарифм этой группы.*

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\psi(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} a_{2^k-2} x^{2^k-1}$$

над кольцом $\mathbb{F}_2[a_{2^k-2},\, k \geq 2]$. Так как при $n = 2^k - 1$ все биномиальные коэффициенты $\binom{n}{j}$, $1 \leq j \leq n-1$, суть нечетные числа, имеет место формула

$$\psi(x+y) = x + y + \sum_{k=2}^{\infty} a_{2^k-2} \frac{x^{2^k} - y^{2^k}}{x-y} = \frac{x\psi(x) - y\psi(y)}{x-y}. \tag{15.4}$$

Пусть $\overline{\psi}(u)$ — ряд, обратный к $\psi(x)$, и $A(u) = u/\overline{\psi}(u)$. Полагая $x = \overline{\psi}(u)$, $y = \overline{\psi}(v)$ в равенстве (15.4), получаем линеаризованную формальную группу

$$\psi(\overline{\psi}(u) + \overline{\psi}(v)) = \frac{u\overline{\psi}(u) - v\overline{\psi}(v)}{\overline{\psi}(u) - \overline{\psi}(v)} = \frac{u^2A(v) - v^2A(u)}{uA(v) - vA(u)}$$

над кольцом $\mathbb{F}_2[a_{2^k-2},\, k \geq 2]$. Логарифм $\overline{\psi}(u)$ этой группы равен $u/A(u)$.

В силу теорем 15.1 и 8.1 классифицирующий гомоморфизм $\mathcal{R}_{B,2} \to \mathbb{F}_2[a_2, a_6, \dots, a_{2^k-2}, \dots]$ является изоморфизмом. $\square$

Специализацией формальной группы Бухштабера с условием $F(u,u) = 0$ является формальная группа (9.9)

$$\mathcal{F}_4(u,v) = \frac{u^2(1 + \mu_6 s(v)^2) - v^2(1 + \mu_6 s(u)^2)}{u(1 + \mu_2 v^2 + \mu_6 s(v)^2) - v(1 + \mu_2 u^2 + \mu_6 s(u)^2)}.$$

Она определена над кольцом $\mathbb{F}_2[\mu_2, \mu_4, \mu_6]$. Здесь $s(u) = u^3 + \dots$ задается уравнением

$$s(u) = u^3 + \mu_2 u^2 s(u) + \mu_4 u s(u)^2 + \mu_6 s(u)^3. \tag{15.5}$$

Имеем $\mathcal{F}_4(u,u) = 0$.

Специализация формальной группы Бухштабера (7.1) задается соотношениями $A(u) = B(u) = 1 + \mu_2 u^2 + \mu_6 s(u)^2$.

Начальные коэффициенты разложения формальной группы в ряд показывают, что над кольцом $\mathbb{F}_2[\mu_2, \mu_4, \mu_6]$ формальная группа не является порождающей, а именно μ_4 не принадлежит ее кольцу коэффициентов $\mathcal{R}_4$.

Теорема 15.3. *Закон сложения в формальной группе Тейта с дополнительным условием $F(u,u) = 0$ определен над кольцом $\mathbb{F}_2[\mu_2, \mu_4, \mu_6]$ и имеет вид* (9.9). *Логарифм формальной группы $\mathcal{F}_4(u,v)$ задается функцией*

$$g(u) = \frac{u}{1 + \mu_2 u^2 + \mu_6 s(u)^2} = \frac{s(u)}{u^2 + \mu_4 s(u)^2}.$$

Доказательство. Начальные коэффициенты разложения ряда $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}(u,u)$ (см. (5.6)) приводят к соотношениям $2 = 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_3 = 0$. Согласно лемме 9.9 эти соотношения определяют вид (9.9).

Для (9.9) имеем $A'(u) = 0$ и $B'(u) = 0$, следовательно, из (15.1) получаем $\mathcal{F}_4(u,u) = 0$.

Для формальной группы $\mathcal{F}_4(u,v)$ из (2.3) и (9.2) имеем

$$g'(u) = \frac{1}{1 + \mu_2 u^2 + \mu_6 s(u)^2}.$$

Над кольцом $\mathbb{F}_2[\mu_2,\mu_4,\mu_6]$ ряд $g(u)$ является нечетным ввиду градуировки, следовательно,

$$g(u)=\frac{u}{1+\mu_2u^2+\mu_6s(u)^2},$$

что с учетом соотношения для $s(u)$ из леммы 9.9 дает последнее утверждение теоремы. □

Следствие 15.4 (из теоремы 15.3 и следствия 4.2). *Формальная группа Тейта* $F(u,v)$ *с дополнительным условием* $F(u,u)=0$ *задает род Хирцебруха* $L_f\colon\Omega_{\mathrm{U}}\to\mathbb{F}_2[\mu_2,\mu_4,\mu_6]$ *такой, что*

$$\sum_{n\ge0}L(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)u^n=\frac{1}{1+\mu_2u^2+\mu_6s(u)^2}=\frac{s'(u)}{u^2+\mu_4s(u)^2},$$

где ряд $s(u)$ *задается формулой* (15.5).

Благодарности. Авторы выражают благодарность Сергею Олеговичу Горчинскому за плодотворные обсуждения результатов этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бухштабер В.М.* Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы // УМН. 1990. Т. 45, №3. С. 185–186.
2. *Бухштабер В.М.* Комплексные кобордизмы и формальные группы // УМН. 2012. Т. 67, №5. С. 111–174.
3. *Бухштабер В.М., Бунькова Е.Ю.* Формальные группы Кричевера // Функц. анализ и его прил. 2011. Т. 45, №2. С. 23–44.
4. *Бухштабер В.М., Бунькова Е.Ю.* Универсальная формальная группа, определяющая эллиптическую функцию уровня 3 // Чебышев. сб. 2015. Т. 16, №2. С. 66–78.
5. *Бухштабер В.М., Мищенко А.С., Новиков С.П.* Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии // УМН. 1971. Т. 26, №2. С. 131–154.
6. *Buchstaber V.M., Panov T.E.* Toric topology. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2015. (Math. Surv. Monogr.; V. 204).
7. *Бухштабер В.М., Устинов А.В.* Кольца коэффициентов формальных групп // Мат. сб. 2015. Т. 206, №11. С. 19–60.
8. *Hattori A.* Integral characteristic numbers for weakly almost complex manifolds // Topology. 1966. V. 5, N 3. P. 259–280.
9. *Hazewinkel M.* Formal groups and applications. New York: Acad. Press, 1978.
10. *Hirzebruch F.* Elliptic genera of level N for complex manifolds: Preprint 88-24. Bonn: Max-Planck-Inst. Math., 1988.
11. *Hirzebruch F., Berger T., Jung R.* Manifolds and modular forms. Wiesbaden: Friedr. Vieweg, 1992. (Aspects Math.; V. E20).
12. *Хонда Т.* Формальные группы и дзета-функции // Математика: Сб. пер. 1969. Т. 13, №6. С. 3–17.
13. *Кричевер И.М.* Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахиезера // Мат. заметки. 1990. Т. 47, №2. С. 34–45.
14. *Lazard M.* Sur les groupes de Lie formels à un paramètre // Bull. Soc. math. France. 1955. V. 83. P. 251–274.
15. *Новиков С.П.* Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, №4. С. 855–951.
16. *Новиков С.П.* Операторы Адамса и неподвижные точки // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32, №6. С. 1245–1263.
17. *Ochanine S.* Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques // Topology. 1987. V. 26, N 2. P. 143–151.
18. *Von Oehsen J.B.* Elliptic genera of level N and Jacobi polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122, N 1. P. 303–312.
19. *Quillen D.* On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75, N 6. P. 1293–1298.
20. *Stong R.E.* Relations among characteristic numbers. I, II // Topology. 1965. V. 4, N 3. P. 267–281; 1966. V. 5, N 2. P. 133–148.
21. *Tate J.T.* The arithmetic of elliptic curves // Invent. math. 1974. V. 23, N 3–4. P. 179–206.
22. *Witten E.* Elliptic genera and quantum field theory // Commun. Math. Phys. 1987. V. 109. P. 525–536.