ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2016, том 471, № 1, с. 7–10

МАТЕМАТИКА

УДК 517.52+512.742.72

СОМОС-4 И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

© 2016 г. Член-корреспондент РАН В. А. Быковский*, А. В. Устинов**

Поступило 30.06.2016 г.

Получена общая формула для элементов сдвоенных последовательностей Сомос-4. Предложено достаточное условие для целочисленности таких последовательностей.

DOI: 10.7868/S0869565216310030

Пусть $\{\tau_n\}$ – ненулевая последовательность комплексных чисел. В работах [5, 6, 13] было доказано, что если для некоторых фиксированных $\alpha \neq 0$ и β выполняется соотношение

$$\tau_{n+2}\tau_{n-2} = \alpha\tau_{n+1}\tau_{n-1} + \beta\tau_n^2, \tag{1}$$

то найдутся комплексные числа $z \neq 0$, z_0, g_2, g_3 такие, что

$$\tau_n = CD^n\frac{\sigma(z_0 + nz)}{\sigma(z)^{n^2}}, \tag{2}$$

где

$$C = \frac{\tau_0}{\sigma(z_0)}, \quad D = \frac{\sigma(z)\sigma(z_0)\tau_1}{\sigma(z+z_0)\tau_0}$$

и σ – функция Вейерштрасса, ассоциированная с эллиптической кривой

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3. \tag{3}$$

При этом если кривая (3) сингулярна, т.е. ее дискриминант $g_2^3 - 27g_3^2$ равен нулю, то вместо σ-функции Вейерштрасса нужно использовать ее вырожденные аналоги (см. [1])

$$\sigma(z) = z \quad (g_2 = g_3 = 0, \omega_1 = \omega_2 = \infty),$$

$$\sigma(z) = \frac{2\omega}{\pi}\exp\left(\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi z}{2\omega}\right)^2\right)\sin\frac{\pi z}{2\omega}$$

$$(g_2, g_3 \neq 0, \omega_1 = \omega, \omega_2 = \infty).$$

Последовательности Сомос-4 тесно связаны с эллиптическими делимостными последовательностями, см. [12, 13, 15] и интегрируемыми динамическими системами с дискретным временем, см. [3, 6, 8, 9, 11, 14]. Одним из фундаментальных свойств последовательности Сомос-4 является справедливость тождества (см. [10])

$$\begin{vmatrix} \tau_{m_1+n_1}\tau_{m_1-n_1} & \tau_{m_1+n_2}\tau_{m_1-n_2} & \tau_{m_1+n_3}\tau_{m_1-n_3} \\ \tau_{m_2+n_1}\tau_{m_2-n_1} & \tau_{m_2+n_2}\tau_{m_2-n_2} & \tau_{m_2+n_3}\tau_{m_2-n_3} \\ \tau_{m_3+n_1}\tau_{m_3-n_1} & \tau_{m_3+n_2}\tau_{m_3-n_2} & \tau_{m_3+n_3}\tau_{m_3-n_3} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

которое выполняется для произвольных целых или одновременно полуцелых m_i, n_i $(i = 1, 2, 3)$. В частности, при $m_1 = n$, $m_2 = 1$, $m_3 = 0$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$ это тождество превращается в исходное рекуррентное соотношение (1). Проверка того, что равенство (4) выполняется для последовательности (2), сводится к применению трехчленного тождества Вейерштрасса (см. [2])

$$\sigma(a+b)\sigma(a-b)\sigma(c+d)\sigma(c-d) -$$
$$- \sigma(a+c)\sigma(a-c)\sigma(b+d)\sigma(b-d) +$$
$$+ \sigma(a+d)\sigma(a-d)\sigma(b+c)\sigma(b-c) = 0.$$

Так же проверяется, что последовательности

$$A_n = C_1D_1^n\frac{\sigma(z_1 + nz)}{\sigma(z)^{n^2}}, \quad B_n = C_2D_2^n\frac{\sigma(z_2 + nz)}{\sigma(z)^{n^2}} \tag{5}$$

удовлетворяют соотношению, аналогичному (4):

$$\begin{vmatrix} A_{m_1+n_1}B_{m_1-n_1} & A_{m_1+n_2}B_{m_1-n_2} & A_{m_1+n_3}B_{m_1-n_3} \\ A_{m_2+n_1}B_{m_2-n_1} & A_{m_2+n_2}B_{m_2-n_2} & A_{m_2+n_3}B_{m_2-n_3} \\ A_{m_3+n_1}B_{m_3-n_1} & A_{m_3+n_2}B_{m_3-n_2} & A_{m_3+n_3}B_{m_3-n_3} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим более общую задачу о нахождении последовательностей $\{A_n\}, \{B_n\} \subset \mathbb{C}$, которые задаются начальными членами

$$A_{\pm2}, A_{\pm1}, A_0, B_{\pm2}, B_{\pm1}, B_0 \tag{7}$$

и рекуррентными соотношениями

$$A_{n+2}B_{n-2} = \alpha A_{n+1}B_{n-1} + \beta A_nB_n, \tag{8}$$

$$A_{n-2}B_{n+2} = \gamma A_{n-1}B_{n+1} + \delta A_nB_n. \tag{9}$$

Хабаровское отделение
Института прикладной математики
Дальневосточного отделения
Российской Академии наук
**E-mail: vab@iam.khv.ru*
***E-mail: ustinov.alexey@gmail.com*

Будем считать, что последовательности $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ не содержат нулевых элементов, так как в противном случае по формулам (8), (9) их нельзя определить для всех целых n. Общее решение такой задачи не может быть описано равенствами (5), поскольку последовательности $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ определяются 12-ю свободными параметрами (10 начальных условий (7) и 4 коэффициента α, β, γ, δ, связанные двумя линейными уравнениями, получающимися из (8), (9) при $n = 0$), в то время как формулы (5) используют лишь 9 свободных параметров ($C_{1,2}$, $D_{1,2}$, z, $z_{1,2}$, $g_{2,3}$). Однако если предположить, что начальные члены последовательностей $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ удовлетворяют равенству (6), то общее решение будет действительно иметь вид (5).

Будем считать, что начальные условия (7) связаны равенством

$$\begin{vmatrix} A_2B_0 & A_1B_1 & A_0B_2 \\ A_1B_{-1} & A_0B_0 & A_{-1}B_1 \\ A_0B_{-2} & A_{-1}B_{-1} & A_{-2}B_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{10}$$

а значения A_3, B_3, найденные из равенств (8), (9) при $n = 1$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{vmatrix} A_3B_0 & A_2B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_{-1} & A_1B_0 & A_0B_1 \\ A_1B_{-2} & A_0B_{-1} & A_{-1}B_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

$$\begin{vmatrix} A_2B_1 & A_1B_2 & A_0B_3 \\ A_1B_0 & A_0B_1 & A_{-1}B_2 \\ A_0B_{-1} & A_{-1}B_0 & A_{-2}B_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

В частности это означает, что коэффициенты α, β, γ, δ рекуррентных соотношений (8), (9) однозначно определяются по начальным членам (7). Действительно, значения A_3, B_3 можно найти из равенств (11), (12). Равенство (8), взятое для $n = 0$ и $n = 1$, дает систему из двух линейных уравнений, из которой однозначно находятся неизвестные α и β:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} A_3B_{-1} & A_1B_1 \\ A_2B_{-2} & A_0B_0 \end{vmatrix}}{\Delta_1}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} A_2B_0 & A_3B_{-1} \\ A_1B_{-1} & A_2B_{-2} \end{vmatrix}}{\Delta_1}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} A_2B_0 & A_1B_1 \\ A_1B_{-1} & A_0B_0 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Аналогично находятся γ и δ:

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} A_{-1}B_3 & A_1B_1 \\ A_{-2}B_2 & A_0B_0 \end{vmatrix}}{\Delta_2}, \quad \delta = \frac{\begin{vmatrix} A_0B_2 & A_{-1}B_3 \\ A_{-1}B_1 & A_{-2}B_2 \end{vmatrix}}{\Delta_2}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_0B_2 & A_1B_1 \\ A_{-1}B_1 & A_0B_0 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Отсюда следует, что поставленную задачу можно переформулировать следующим образом: описать последовательности комплексных чисел $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, заданные начальными членами (7), у которых значения A_3, B_3 находятся из равенств (11), (12), а остальные элементы вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{vmatrix} A_{n+2}B_{n-2} & A_{n+1}B_{n-1} & A_nB_n \\ A_3B_{-1} & A_2B_0 & A_1B_1 \\ A_2B_{-2} & A_1B_{-1} & A_0B_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

$$\begin{vmatrix} A_{n-2}B_{n+2} & A_{n-1}B_{n+1} & A_nB_n \\ A_{-1}B_3 & A_0B_2 & A_1B_1 \\ A_{-2}B_2 & A_{-1}B_1 & A_0B_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Чтобы величины A_3, B_3, α, β, γ, δ были корректно определены, необходимо требовать выполнения условия $\Delta_0\Delta_1\Delta_2 \neq 0$, где Δ_1, Δ_2 определены соответственно в (13) и (14), и $\Delta_0 = \begin{vmatrix} A_1B_0 & A_0B_1 \\ A_0B_{-1} & A_{-1}B_0 \end{vmatrix}$.

З а м е ч а н и е. Равенства (10)–(12), (15), (16) получаются из (6) соответственно при

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Т е о р е м а. *Общее решение поставленной задачи имеет вид* (5), *где*

$$C_1 = \frac{A_0}{\sigma(z_1)}, \quad C_2 = \frac{B_0}{\sigma(z_2)}, \quad D_1 = \frac{\sigma(z)\sigma(z_1)A_1}{\sigma(z + z_1)A_0},$$

$$C_1 = \frac{\sigma(z)\sigma(z_2)B_1}{\sigma(z + z_2)B_0},$$

z, z_1, z_2 — *комплексные числа и* σ — *функция Вейерштрасса* (*быть может, вырожденная*), *ассоциированная с некоторой кривой вида* (3).

Если последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ удовлетворяют соотношениям (8), (9), то очевидно, что для любых $\tilde{C}_1$, $\tilde{D}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{D}_2$ последовательности

$$\tilde{A}_n = \tilde{C}_1\tilde{D}_1^nA_n, \quad \tilde{B}_n = \tilde{C}_2\tilde{D}_2^nA_n$$

также будут удовлетворять (8), (9). Поэтому естественно перейти к калибровочно-инвариантным переменным

$$a_n = \frac{A_{n+1}A_{n-1}}{A_n^2}, \quad b_n = \frac{B_{n+1}B_{n-1}}{B_n^2}, \tag{17}$$

для которых условие (10) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} a_1/b_0 & 1 & b_1/a_0 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_{-1}/a_0 & 1 & a_{-1}/b_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{18}$$

или в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} &a_{-1}a_0^2a_1 - b_{-1}b_0^2b_1 = \\ &= a_0b_0(a_0(a_{-1}+a_1) - b_0(b_{-1}+b_1)). \end{aligned} \tag{19}$$

П р е д л о ж е н и е. *Пусть параметры* a_0, $a_{\pm1}$, b_0, $b_{\pm1} \in \mathbb{C}^*$ *связаны условием* (18) *и* $a_0 \neq b_0$. *Тогда найдется кривая*

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \tag{20}$$

и числа z_1, z_2, $z \in C$, *такие что*

$$\begin{aligned} a_n &= \wp(z) - \wp(z_1 + nz), \\ b_n &= \wp(z) - \wp(z_2 + nz) \quad (n = 0, \pm1). \end{aligned} \tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения проведем по схеме, использованной при доказательстве предложения 2.2 в работе [6]. Будем последовательно находить координаты точек

$$\begin{aligned} (\lambda,\mu) &= (\wp(z), \wp'(z)), \\ (\nu_i,\xi_i) &= (\wp(z_i), \wp'(z_i)) \quad (i = 1,2), \end{aligned} \tag{22}$$

лежащих на кривой (20). Очевидно, что выполняются равенства

$$a_0 = \lambda - \nu_1, \quad b_0 = \lambda - \nu_2. \tag{23}$$

Из тождества (см. [5])

$$\begin{aligned} &(\wp(z) - \wp(u-z))(\wp(z) - \wp(u))(\wp(z) - \wp(u+z)) = \\ &= \wp'(z)^2 - \frac{\wp'(z)^2(\wp(2z) - \wp(z))}{\wp(z) - \wp(u)} \end{aligned}$$

следует, что

$$a_{-1}a_0^2a_1 = a_0\mu^2 + (\wp(2z) - \wp(z))\mu^2, \tag{24}$$

$$b_{-1}b_0^2b_1 = b_0\mu^2 + (\wp(2z) - \wp(z))\mu^2. \tag{25}$$

Поэтому значение μ находится из равенства

$$\mu^2 = \frac{a_{-1}a_0^2a_1 - b_{-1}b_0^2b_1}{a_0 - b_0}.$$

Согласно формуле сложения (см. [1, 2])

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2 - \wp(u) - \wp(v),$$

выполняются равенства

$$\begin{aligned} a_{\pm1} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\xi_1 \mp \mu}{a_0}\right)^2 + \nu_1 + 2\lambda, \\ b_{\pm1} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\xi_2 \mp \mu}{b_0}\right)^2 + \nu_2 + 2\lambda. \end{aligned} \tag{26}$$

Рассматривая разности $a_1 - a_{-1}$ и $b_1 - b_{-1}$, получаем, что

$$\xi_1\mu = \Delta_a, \quad \xi_2\mu = \Delta_b, \tag{27}$$

где

$$\Delta_a = a_0^2(a_1 - a_{-1}), \quad \Delta_b = b_0^2(b_1 - b_{-1}). \tag{28}$$

Предположим сначала, что $\mu \neq 0$. Тогда значения ξ_1 и ξ_2 можно найти из равенств (27). Записывая равенства (26) в виде

$$\nu_1 + 2\lambda = a_1 + \left(\frac{\Delta_a - \mu^2}{2a_0\mu}\right)^2,$$

$$\nu_2 + 2\lambda = b_1 + \left(\frac{\Delta_b - \mu^2}{2b_0\mu}\right)^2,$$

в совокупности с (23) получаем систему линейных уравнений, из которой находятся значения ν_1, ν_2 и λ (условие (18) гарантирует совместность этой системы). Параметры g_2 и g_3 находятся из системы

$$\mu^2 = 4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3, \tag{29}$$

$$\xi_i^2 = 4\nu_i^3 - g_2\nu_i - g_3 \quad (i = 1,2), \tag{30}$$

совместность которой также обеспечивается условием (18). Таким образом, координаты (22) однозначно определяются с точностью до инволюции $(\lambda,\mu) \to (\lambda,-\mu)$, $(\nu_i,\xi_i) \to (\nu_i,-\xi_i)$, соответствующей замене $z \to -z$, $z_i \to -z_i$ $(i = 1,2)$. Проверка показывает, что величина $\wp(2z) - \wp(z)$, найденная по формуле удвоения (см. [1, 2])

$$\wp(2z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 - 2\wp(z) = \left(\frac{12\lambda^2 - g_2}{4\mu}\right)^2 - 2\lambda$$

(при условии (18)), удовлетворяет уравнениям (24) и (25). Если $g_2^3 = 27g_3^2$, то кривая (20) сингулярна, и в равенстве (21) вместо эллиптической функции Вейерштрасса нужно использовать ее вырожденные аналоги (см. [1])

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} \quad (g_2 = g_3 = 0, \omega_1 = \omega_2 = \infty),$$

$$\wp(z) = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left(-\frac{1}{3} + \left(\sin\frac{\pi z}{2\omega}\right)^{-2}\right)$$
$$(g_2, g_3 \neq 0, \omega_1 = \omega, \omega_2 = \infty).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu = 0$, тогда $a_{-1}a_0^2a_1 = b_{-1}b_0^2b_1$, и из условия (18) следует, что $a_0(a_1 + a_{-1}) = b_0(b_1 + b_{-1})$. Из равенств (27) следует, что $a_1 = a_{-1}$ и $b_1 = b_{-1}$, т.е. $a_0a_1 = b_0b_1$.

Будем последовательно выражать неизвестные через параметр λ. Из (23) и (26) находим, что $\nu_1 = \lambda - a_0$, $\nu_2 = \lambda - b_0$,

$$\xi_1^2 = 4a_0^2(3\lambda - a_0 - a_1), \quad \xi_2^2 = 4b_0^2(3\lambda - b_0 - b_1).$$

Подставляя ξ_1^2 и ξ_2^2 в (30), приходим к равенствам

$$12\lambda^2 - g_2 + g_3/a_0 - 4a_0a_1 = 0,$$
$$12\lambda^2 - g_2 + g_3/b_0 - 4b_0b_1 = 0,$$

из которых следует, что $g_3 = 0$ и $12\lambda^2 - g_2 - 4a_0a_1 = 0$. Кроме того, согласно (29), $4\lambda^3 - g_2\lambda = 0$. Поэтому $\lambda = 0$ или $\lambda = \pm\sqrt{a_0a_1/2}$. В каждом случае, как и при $\mu \neq 0$, параметры (22) однозначно находятся с точностью до инволюции $(\lambda,\mu) \to (\lambda,-\mu),(\nu_i,\xi_i) \to (\nu_i,-\xi_i)$ $(i = 1,2)$.

Доказательство теоремы. Из доказанного предложения и формулы (см. [1, 2])

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}$$

следует, что равенства (5) выполняются при $-2 \leq n \leq 2$. Поскольку остальные члены последовательностей $\{A_n\}, \{B_n\}$ находятся с помощью равенств (11)–(16), которым удовлетворяют и последовательности $C_iD_i^n \dfrac{\sigma(z_i + nz)}{\sigma(z)^{n^2}}$, $i = 1,2$ (см. замечание к теореме), то равенства (5) выполняются и для всех целых n.

Следствие. *Частными случаями формулы* (6) *являются равенства*

$$\begin{vmatrix} A_{2n}B_0 & A_{n+1}B_{n-1} & A_nB_n \\ A_{1+n}B_{1-n} & A_2B_0 & A_1B_1 \\ A_nB_{-n} & A_1B_{-1} & A_0B_0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} A_{2n-1}B_0 & A_nB_{n-1} & A_{n-1}B_n \\ A_nB_{1-n} & A_1B_0 & A_0B_1 \\ A_{n-1}B_{-n} & A_0B_{-1} & A_{-1}B_0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} A_0B_{2n} & A_{n-1}B_{n+1} & A_nB_n \\ A_{1-n}B_{1+n} & A_0B_2 & A_1B_1 \\ A_{-n}B_n & A_{-1}B_1 & A_0B_0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} A_0B_{2n-1} & A_{n-1}B_n & A_nB_{n-1} \\ A_{1-n}B_n & A_0B_1 & A_1B_0 \\ A_{-n}B_{n-1} & A_{-1}B_0 & A_0B_{-1} \end{vmatrix} = 0,$$

которые также позволяют вычислять элементы последовательностей $\{A_n\}, \{B_n\}$. *Отсюда вытекает, что все члены этих последовательностей являются полиномами Лорана от исходных данных и параметров* $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$:

$$A_n, B_n \in Z\left[A_0^{\pm1}, B_0^{\pm1}, A_{\pm1}, A_{\pm2}, B_{\pm1}, B_{\pm2}, \Delta_0^{\pm1}, \Delta_1^{\pm1}, \Delta_2^{\pm1}\right].$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14–11–00335).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
2. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Д.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматлит, 1963.
3. *Bastien G., Rogalski M.* // J. Math. Anal. and Appl. 2004. V. 300. P. 303–333.
4. *Fomin S., Zelevinsky A.* // Adv. Appl. Math. 2002. V. 28. P. 119–144.
5. *Hone A.* // Bull. London. Math. Soc. 2005. V. 37. P. 161–171.
6. *Hone A.* // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. V. 359. P. 5019–5034.
7. *Hone A. N., Swart C.* // Math. Proc. Cambidge. Philos. Soc. 2008. V. 145. P. 65–85.
8. *Iatrou A., Roberts J.A.G.* // J. Phys. A. Math. Gen. 2001. V. 34. P. 6617–6636.
9. *Iatrou A., Roberts J.A.G.* // Nonlinearity. 2002. V. 15. P. 459–489.
10. *Ma X.* // Discrete Math. 2010. V. 310. P. 1–5.
11. *Quispel G., Roberts J., Thompson C.* // Physica D. 1989. V. 34. P. 183–192.
12. *Shipsey R.* Elliptic Divisibility Sequences, PhD thesis. L.: Univ. London, 2000.
13. *Swart C.S.* Elliptic Curves and Related Sequences. PhD thesis. L.: Royal Holloway, Univ. London, 2003.
14. *Tsuda T.* // J. Phys. A. Math. Gen. 2004. V. 37. P. 2721–2730.
15. *Ward M.* // Amer. J. Math. 1948. V. 70. P. 31–74.