Математические заметки

Том 102 выпуск 1 июль 2017

УДК 512.741+517.583

Формальная группа Бухштабера и эллиптические функции малых уровней

А. В. Устинов

В настоящей работе предлагается метод для нахождения соотношений на ряды, задающие формальную группу Бухштабера. Этот метод применяется в случаях, когда экспонентой группы является эллиптическая функция уровня $n=2,3$ и 4. Доказывается также алгебраическое соотношение на ряды определяющие универсальную формальную группу Бухштабера.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: формальные группы, теоремы сложения, эллиптические функции.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11417

1. Введение. Будем придерживаться стандартных обозначений для σ-, ζ- и $\wp$-функций Вейерштрасса, построенных по решетке $\Gamma=2\omega_1\mathbb{Z}+2\omega_2\mathbb{Z}$ с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\operatorname{Im}\omega_2/\omega_1>0$ (см., например, [1]). Решетка Γ всегда будет предполагаться фиксированной, поэтому зависимость функций от Γ в дальнейшем, как правило, указываться не будет.

В статье [2] для функции Бейкера–Ахиезера

$$\Phi(x)=\frac{\sigma(z-x)}{\sigma(x)\sigma(z)}\,e^{\zeta(z)x}$$

была доказана теорема сложения

$$\Phi(x+y)=\frac{\Phi(x)\Phi'(y)-\Phi'(x)\Phi(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\,.$$

Из нее следует, что при произвольном α для функции

$$f(x)=\frac{e^{\alpha x}}{\Phi(x)}=\frac{\sigma(x)\sigma(z)}{\sigma(z-x)}\,e^{\alpha x-\zeta(z)x}, \tag{1.1}$$

где $z\not\equiv 0\,(\operatorname{mod}\Gamma)$, выполняется равенство

$$f(x+y)=\frac{f(x)^2a(y)-f(y)^2a(x)}{f(x)b(y)-f(y)b(x)}\,, \tag{1.2}$$

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант ОФИ-М 16-51-55017-ГФЕН и Правительства Хабаровского края (распоряжение от 29.06.2016 № 479-РП).

в котором $a(x) = f(x)^2(\wp(x) + \lambda)$,

$$b(x) = f'(x) + \mu f(x), \tag{1.3}$$

и параметры λ и μ могут быть выбраны произвольно. Наиболее простые формулы получаются при $\lambda = -\wp(z)$, поэтому везде в дальнейшем будет предполагаться, что

$$a(x) = f(x)^2(\wp(x) - \wp(z)). \tag{1.4}$$

Формула (1.2) означает, что функция (1.1) является экспонентой формальной группы Бухштабера

$$F(u, v) = \frac{u^2 A(v) - v^2 A(u)}{uB(v) - vB(u)}\,, \tag{1.5}$$

где

$$A(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i t^i, \qquad B(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i t^i.$$

Переход осуществляется с помощью замен

$$u = f(x), \qquad v = f(y), \qquad A(t) = a(f^{-1}(t)), \qquad B(t) = b(f^{-1}(t)).$$

Из вида группы (1.5) следует, что коэффициенты A_2 и B_1 рядов $A(t)$ и $B(t)$ могут выбираться произвольно.

В работе [3] была решена обратная задача, а именно показано, что экспонентой формального группового закона (1.5) является функция вида (1.1). Приведем точную формулировку этого результата из книги [4] (см. теорему E 5.4).

Теорема 1. *Пусть дан формальный групповой закон* (1.5), *где* $A(t)$, $B(t) \in R[[t]]$, R *– кольцо без кручения и* $A(0) = B(0) = 1$. *Тогда экспонента закона* (1.5) *имеет вид* (1.1), *где* α *и параметры* $\wp(z)$, $\wp'(z)$, g_2, *задающие функцию Бейкера–Ахиезера* $\Phi(x, z)$, *могут быть выражены через коэффициенты рядов* $A(t)$, $B(t)$ *исходя из разложения*

$$\begin{aligned} f(x) = x + 2\alpha\frac{x^2}{2} + 3(\alpha^2 + \wp(z))\frac{x^3}{3!} + 4(\alpha^3 - \wp'(z) + 3\alpha\wp(z))\frac{x^4}{4!} \\ + (5\alpha^4 + 30\alpha^2\wp(z) + 45\wp(z)^2 - 20\alpha\wp'(z) - 3g_2)\frac{x^5}{5!} + \cdots . \end{aligned}$$

Все дальнейшие рассуждения будут опираться на эту теорему, поэтому везде ниже будет предполагаться, что формальные групповые законы рассматриваются над кольцами без кручения.

Для натурального $n > 1$ через z_n будем обозначать точку точного порядка n на торе $\mathbb{C}/\Gamma$. Другими словами $z_n = (2\omega_1 k + 2\omega_2 l)/n$, где k, l целые и $(k, l, n) = 1$. Следуя работам [5]–[7] определим *эллиптическую функцию уровня* n равенством

$$f_n(x) = \frac{\sigma(x)\sigma(z_n)}{\sigma(z_n - x)}\,e^{-h_n x}, \tag{1.6}$$

где $h_n = (2\eta_1 k + 2\eta_2 l)/n$ ($\eta_j = \zeta(\omega_j)$, $j = 1, 2$). Каждая такая функция является частным случаем экспоненты формальной группы Бухштабера и получаются подстановкой в равенство (1.6) $z = z_n$ и

$$\alpha = \alpha_n = \zeta(z_n) - h_n. \tag{1.7}$$

Ряды $a(x)$ и $b(x)$, задающие закон сложения (1.2), принимают вид

$$a_n(x) = f_n(x)^2(\wp(x) - \wp(z_n)), \tag{1.8}$$

$$b_n(x) = f_n'(x) + \mu_n f_n(x), \tag{1.9}$$

где μ_n может быть выбрано произвольно. В формальном групповом законе (1.5) при этом будут участвовать функции

$$A_n(t) = a_n(f_n^{-1}(t)), \qquad B_n(t) = b_n(f_n^{-1}(t)),$$

т.е. в каждом случае будет получаться некоторая специализация группы (1.5).

Эллиптическими функциями уровня 2 являются следующие три функции, выражающиеся через эллиптические функции Якоби: $f(x) = \operatorname{sn} x$ (при $z = \omega_2$), $f(x) = \operatorname{sc} x := \operatorname{sn} x / \operatorname{cn} x$ (при $z = \omega_1$) и $f(x) = \operatorname{sd} x := \operatorname{sn} x / \operatorname{dn} x$ (при $z = \omega_1 + \omega_2$). Они удовлетворяют теореме сложения

$$f(u+v) = \frac{f(u)^2 - f(v)^2}{f(u)f'(v) - f(v)f'(u)},$$

которой соответствует формальный групповой закон

$$F(u,v) = \frac{u^2 - v^2}{uB(v) - vB(u)}. \tag{1.10}$$

Кроме того, как хорошо известно, эллиптический синус Якоби $y(z) = \operatorname{sn}(z,k)$ однозначно определяется как решение дифференциального уравнения

$$y'(z)^2 = (1 - \xi y(z)^2)(1 - \eta y(z)^2)$$

($\xi = 1$, $\eta = k^2$) с начальными данными $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Аналогичным дифференциальным уравнениям (с теми же начальными данными) удовлетворяют и функции $y(z) = \operatorname{sn}(z,k)/\operatorname{cn}(z,k)$ ($\xi = -1$, $\eta = k^2 - 1$) и $y(z) = \operatorname{sn}(z,k)/\operatorname{dn}(z,k)$ ($\xi = -k^2$, $\eta = 1 - k^2$). В терминах формального группового закона (1.5) перечисленные свойства эллиптических функций уровня 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Эллиптическая функция уровня* 2 *является экспонентой формальной группы* (1.5), *в которой* $A_2(t) = 1$ *и при* $B_1 = 0$ *функция* $B(t) = B_2(t)$ *удовлетворяет квадратному уравнению*

$$B(t)^2 = 1 + 2B_2t^2 + (B_2^2 + 2B_4)t^4. \tag{1.11}$$

Кольцо коэффициентов формального группового закона (1.10) описано в [8].

Для уровня $n = 3$ в работах [7], [9] был доказан следующий результат.

Теорема 3. *Произвольная эллиптическая функция уровня* 3 *является экспонентой формальной группы* (1.5), *в которой при* $B_1 = 2A_1$ *и* $A_2 = 0$ *ряды* $A(t) = A_3(t)$ *и* $B(t) = B_3(t)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$A(t)^2 = B(t), \tag{1.12}$$

$$A(t)^3 - 3A_1tA(t) = 1 + (A_1^3 + 3A_3)t^3, \tag{1.13}$$

$$B(t)(B(t) - 3A_1t)^2 = (1 + (A_1^3 + 3A_3)t^3)^2. \tag{1.14}$$

В этой теореме первое соотношение связывает между собой $A(t)$ и $B(t)$, второе t и $A(t)$, а третье t и $B(t)$. (Последняя формула будет выглядеть немного сложней, если коэффициенты выражать через $B_1 = 2A_1$ и $B_3 = 2A_3$.) Отметим, что впервые формальная группа с соотношением $A(t)^2 = B(t)$ появилась в работе [10] при изучении формальных групп, получающихся из закона сложения точек на эллиптической кривой.

Для уровня $n = 4$ в статье [11] доказано, что при $A_2 = B_1 = 0$ ряды $A(t) = A_4(t)$ и $B(t) = B_4(t)$ связаны уравнением

$$(2B(t) + 3A_1 t)^2 = 4A(t)^3 - (3A_1^2 - 8B_2)t^2 A(t)^2. \tag{1.15}$$

По-видимому это соотношение является одной из наиболее простых формул, связывающих между собой t, $A(t)$ и $B(t)$.

Хорошо известно, что любые две эллиптические функции с одними и теми же периодами связаны между собой алгебраическим соотношением (см. [1; § 16]). Для произвольного уровня n функции f_n^n, a_n^n, b_n^n являются эллиптическими (см. лемму 2 ниже), поэтому любые две из трех функций f_n, a_n, b_n должны быть связаны алгебраическим соотношением. Следовательно, при любом $n \geqslant 2$ любые два из трех степенных рядов t, $A_n(t)$, $B_n(t)$ также должны быть связаны алгебраическими соотношениями, подобными (1.12)–(1.14). В настоящей статье решается задача о нахождении этих соотношений в случае, когда $n = 4$. Основная идея заключается в том, чтобы выразить функции a_n, b_n и f_n через функции $\wp$ и $\wp'$, ассоциированные с исходной решеткой Γ, а затем исключить $\wp$ и $\wp'$ из полученных уравнений с помощью тождества ($g_2 = g_2(\Gamma)$, $g_3 = g_3(\Gamma)$)

$$\wp'(x)^2 = 4\wp(x)^3 - g_2\wp(x) - g_3. \tag{1.16}$$

В п. 3 и п. 4 этот подход применяется для доказательства теорем 2 и 3 соответственно.

В п. 5 дано решение поставленной выше задачи.

Теорема 4. *Произвольная эллиптическая функция уровня* 4 *является экспонентой формальной группы* (1.5), *в которой при* $B_1 = A_1/2$ *ряды* $A(t) = A_4(t)$ *и* $B(t) = B_4(t)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$C_3 A(t)^4 (A(t)^2 - 1)^2 + C_1^3 B(t)^2 (A(t)^3 - B(t)^2) = 0, \tag{1.17}$$

$$(A(t)^2 - 1)^2 = C_1^2 t^2 A(t) + C_4 t^4, \tag{1.18}$$

$$C_1^2 B(t)(B(t) + C_1 t)^3 - C_4 t^2 B(t)(2B(t) + C_1 t) = (1 - C_4 t^4)(C_1^2 - C_3^2 t^4), \tag{1.19}$$

где $C_1 = -2A_1$, $C_3 = -A_1^3/2 - 4A_3$, $C_4 = C_1 C_3 = A_1^4 + 8A_1 A_3$.

Отметим, что соотношение (1.15) не следует из (1.17)–(1.19), поскольку оно получено в предположении, что $B_1 = 0$, а не $B_1 = A_1/2$.

Из определений (1.1), (1.3) и (1.4) следует, что при произвольном z функции a/f^2 и b/f являются эллиптическими, а значит, связаны алгебраическим уравнением. Поэтому для универсальной формальной группе Бухштабера (1.5) существует алгебраическое соотношение, связывающее между собой t, $A(t)$ и $B(t)$. Оно доказывается в п. 6.

Теорема 5. *Ряды $A(t)$ и $B(t)$, задающие формальный групповой закон* (1.5) *над кольцом без кручения, при $A_1 = 2B_1$ связаны алгебраическим уравнением*

$$\begin{aligned} A(t)(A(t) - B(t)^2 + (B_1^2 + 2B_2)t^2) \\ + t^3(B(t)(2B_1B_2 + 3A_3) + t(2B_4 + 2B_1^2B_2 + 9B_1A_3 + B_2^2)) = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Точки порядков 2 и 4 характеризуются соответственно условиями $\wp'(z_2) = 0$ и $\wp'(2z_4) = 0$. Точки порядка $n \geqslant 3$ $(n \neq 4)$ характеризуются условиями*

$$\wp((n-1)z_n) = \wp(z_n) \neq \infty, \qquad \wp(kz_n) \neq \wp(z_n) \quad \text{при} \quad 2 \leqslant k \leqslant n-3. \tag{2.1}$$

Доказательство. Отображение $z \to (\wp(z), \wp'(z))$ задает изоморфизм тора $\mathbb{C}/\Gamma$ и эллиптической кривой $y^2 = 4x^3 - g_2(\Gamma)x - g_3(\Gamma)$. Следовательно, точки порядка n можно характеризовать условиями

$$\wp((n-1)z_n) = \wp(z_n), \qquad \wp'((n-1)z_n) = -\wp'(z_n) \tag{2.2}$$

в предположении, что n нельзя заменить меньшим числом. Поэтому точки порядка 2 характеризуются условием $\wp'(z_2) = 0$. Значит, точки порядка 4 характеризуются условием $\wp'(2z_4) = 0$.

Пусть $n \geqslant 3$ и $n \neq 4$. Очевидно, что условия (2.1) являются *необходимыми* для того, чтобы z_n было точкой порядка n. Проверим их *достаточность*. Если нарушается второе из условий (2.2), то

$$\wp((n-1)z_n) = \wp(z_n), \qquad \wp'((n-1)z_n) = \wp'(z_n).$$

Значит, имеем $(n-1)z_n \equiv z_n \pmod{\Gamma}$. При $n = 3$ это сравнение противоречит тому, что $\wp(z_n) \neq \infty$. При $n \geqslant 5$ полученное сравнение означает, что z_n – точка порядка $d \mid (n-2)$. Но тогда $\wp(kz_n) = \wp(z_n)$, где $k = 3$ при $d = 2$ и $k = d - 1 \leqslant n - 3$ при $d > 2$. Противоречие показывает, что условия (2.2) действительно следуют из (2.1). Кроме того, в равенствах (2.2) n нельзя заменить меньшим числом (делителем n), поскольку это так же противоречит второму из условий (2.1).

Лемма 2. *Пусть $n \geqslant 2$ и функции f_n, a_n, b_n заданы равенствами* (1.6), (1.8), (1.9) *соответственно. Тогда*

$$f_n(x)^n = \frac{\sigma(x)^n \sigma(z_n)^{n-1} \sigma((n-1)z_n)}{\sigma(z_n - x)^{n-1} \sigma(x + (n-1)z_n)}.$$

Функции f_n^n, a_n^n, b_n^n являются эллиптическими.

Доказательство. Пользуясь формулой, см. [12; 18.2.20],

$$\sigma(t + 2k\omega_1 + 2l\omega_2) = (-1)^{k+l+kl} \sigma(t) e^{(t + k\omega_1 + l\omega_2)(2k\eta_1 + 2l\eta_2)}$$

при $t = x - z_n$ и $t = -z_n$ получаем, что

$$\frac{\sigma(x + (n-1)z_n)\sigma(-z_n)}{\sigma((n-1)z_n)\sigma(x - z_n)} = e^{nh_n x}.$$

Следовательно,

$$f_n(x)^n = \frac{\sigma(x)^n\sigma(z_n)^n}{\sigma(z_n-x)^n}\,e^{-nh_nx} = \frac{\sigma(x)^n\sigma(z_n)^{n-1}\sigma((n-1)z_n)}{\sigma(z_n-x)^{n-1}\sigma(x+(n-1)z_n)}\,.$$

Из определения (1.6) следуют равенства

$$f_n(x+2\omega_1) = f_n(x)e^{2\pi il/n}, \qquad f_n(x+2\omega_2) = f_n(x)e^{-2\pi ik/n},$$

поэтому f_n^n – эллиптическая функция. Эллиптичность функции a_n^n следует из определения a_n и эллиптичности f_n^n.

Из стандартных формул

$$\zeta(u+v) = \zeta(u)+\zeta(v)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)} \tag{2.3}$$

(см. [12; 18.4.3]), и $\zeta(z)=(\log z)'$ находим, что

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp'(x)+\wp'(z)}{\wp(x)-\wp(z)}+\alpha.$$

Значит, логарифмическая производная функции f – это эллиптическая функция. Следовательно, функция

$$\frac{b(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}+\mu = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp'(x)+\wp'(z)}{\wp(x)-\wp(z)}+\alpha+\mu \tag{2.4}$$

также является эллиптической. Поэтому эллиптичность b_n^n следует из эллиптичности f_n^n и эллиптичности отношения b_n/f_n.

Лемма 3. *Пусть $n\geqslant 2$. Тогда для величины α_n, определяемой равенством* (1.7), *выполняется равенство*

$$\alpha_n = \frac{(n-1)\zeta(z_n)-\zeta((n-1)z_n)}{n}\,.$$

Доказательство. Пользуясь формулой (см. [12; 18.2.19])

$$\zeta(t+2k\omega_1+2l\omega_2) = \zeta(t)+2k\eta_1+2l\eta_2,$$

при $t=-z_n$ получаем, что $nh_n=\zeta(z_n)+\zeta((n-1)z_n)$. Подставляя это выражение в определение величины α_n, приходим к утверждению леммы.

Следующее утверждение проверяется непосредственными вычислениями.

Лемма 4. *Начальные коэффициенты рядов $A(t)=a(f^{-1}(t))$ и $B(t)=b(f^{-1}(t))$, где функции f, a и b определены равенствами* (1.1), (1.4) *и* (1.3) *соответственно, имеют вид*

$$A_1=2\alpha, \qquad A_2=0, \qquad A_3=\frac{1}{3}(\alpha^3-3\alpha\wp(z)-\wp'(z)), \qquad A_4=-A_1A_3, \tag{2.5}$$

$$B_1=2\alpha+\mu, \qquad B_2=\frac{1}{2}(3\wp(z)-\alpha^2), \qquad B_3=2A_3, \tag{2.6}$$

$$B_4=\frac{1}{8}(-9\alpha^4+30\alpha^2\wp(z)+3\wp(z)^2+12\alpha\wp'(z)-g_2). \tag{2.7}$$

3. Уровень 2.

Доказательство теоремы 2. Применяя последовательно лемму 2 и формулу (см. [12; 18.4.4])

$$\wp(u)-\wp(v)=-\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}\,, \tag{3.1}$$

получаем, что

$$\frac{1}{f_2(x)^2}=-\frac{\sigma(x-z_2)\sigma(x+z_2)}{\sigma(x)^2\sigma(z_2)^2}=\wp(x)-\wp(z_2). \tag{3.2}$$

Значит, по определению (1.4) $a_2(t)=1$. Следовательно, $A_2(t)=1$.

Проверим справедливость равенства

$$b_2(x)^2=1+3\wp(z_2)f_2(x)^2+\frac{\wp''(z_2)}{2}\,f_2(x)^4. \tag{3.3}$$

По лемме 3 $\alpha_2=0$. Из предположения $B_1=0$ и равенства $B_1=2\alpha+\mu$ следует, что в определении функции $b_2(x)$ необходимо выбрать $\mu_2=0$. Из условия $\wp'(z_2)=0$, характеризующего точки второго порядка (см. лемму 1), и равенства (2.4) получаем, что

$$\frac{b_2(x)}{f_2(x)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp'(x)}{\wp(x)-\wp(z_2)}\,. \tag{3.4}$$

Выражая $\wp(x)$ и $\wp'(x)$ из равенств (3.2), (3.4) и подставляя их в уравнение Вейерштрасса (1.6) с учетом условия $4\wp(z_2)^3-g_2\wp(z_2)-g_3=0$, приходим к уравнению (3.3). Из формул (2.6), (2.7) при $\alpha=\mu=0$ находим, что

$$B_2=\frac{3}{2}\,\wp(z_2),\qquad 2B_4=\frac{\wp''(z_2)}{2}-B_2^2.$$

Поэтому при переходе к ряду $B_2(t)=b_2(f_2^{-1}(t))$ уравнение (3.3) принимает вид (1.11).

Замечание 1. Теорема 2, в частности, утверждает, что условие $A(t)=1$ является необходимым для того, чтобы экспонента формальной группы Бухштабера была эллиптической функцией уровня 2. Из равенств (2.5) следует, что это условие является и достаточным. Действительно, если $A_1=A_3=0$, то $\alpha=0$ и $\wp'(z)=0$, т.е. z – это точка порядка 2.

4. Уровень 3.

Лемма 5. *Справедливы равенства*

$$\frac{a_3(x)^2}{f_3(x)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(x)+\wp'(z_3)}{\wp(x)-\wp(z_3)}+\frac{\wp''(z_3)}{\wp'(z_3)}\right), \tag{4.1}$$

$$f_3(x)^3=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\wp(x)-\wp(z_3))^2}\left(\frac{\wp'(x)+\wp'(z_3)}{\wp(x)-\wp(z_3)}+\frac{\wp''(z_3)}{\wp'(z_3)}\right). \tag{4.2}$$

Доказательство. Достаточно доказать только первое равенство, поскольку второе является следствием первого и определения функции $a_3(x)$. По лемме 2

$$f_3(x)^3=\frac{\sigma(x)^3\sigma(z_3)^2\sigma(2z_3)}{\sigma(z_3-x)^2\sigma(x+2z_3)}\,.$$

Из (3.1) следует, что

$$(\wp(x)-\wp(z))^2=\frac{\sigma(x-z)^2\sigma(x+z)^2}{\sigma(x)^4\sigma(z)^4}\,. \tag{4.3}$$

Значит,

$$\frac{a_3(x)^2}{f_3(x)}=f_3(x)^3(\wp(x)-\wp(z_3))^2=\frac{\sigma(2z_3)\sigma(x+z_3)^2}{\sigma(x)\sigma(z_3)^2\sigma(x+2z_3)}=\frac{-\sigma(2z_3)}{\sigma(z_3)^4(\wp(x+z_3)-\wp(z_3))}\,.$$

Из равенства $\sigma(2z)=-\wp'(z)\sigma(z)^4$ (см. [12; 18.4.8]) вытекает, что

$$\frac{a_3(x)^2}{f_3(x)}=\frac{\wp'(z_3)}{\wp(x+z_3)-\wp(z_3)}\,.$$

Для доказательства леммы остается убедиться в справедливости равенства

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(x+z)-\wp(z)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp'(x)-\wp'(2z)}{\wp(x)-\wp(2z)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\,. \tag{4.4}$$

Подставляя в (2.3) значения $u=v=z$ и $u=-x$, $v=2z+x$, находим, что

$$\frac{\wp''(z)}{2\wp'(z)}=\zeta(2z)-2\zeta(z), \tag{4.5}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp'(x)-\wp'(2z)}{\wp(x)-\wp(2z)}=\zeta(x)+\zeta(2z)-\zeta(x+2z). \tag{4.6}$$

Складывая формулы, которые получаются подстановкой в (2.3) значений $u=x+z$, $v=z$ и $u=-x-z$, $v=z$ дополнительно получаем равенство

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(x+z)-\wp(z)}=2\zeta(z)-\zeta(x+2z)-\zeta(-x). \tag{4.7}$$

Нужная формула (4.4) является суммой (4.5), (4.6) и (4.7).

В дальнейшем будем использовать обозначение $L_n=\wp''(z_n)/\wp'(z_n)$.

Доказательство теоремы 3. Проверим сначала, что произвольная эллиптическая функция уровня 3 удовлетворяет теореме сложения (1.2), в которой при $\mu_3=-L_3/3$ для функций $f(x)=f_3(x)$, $a(x)=a_3(x)$, $b(x)=b_3(x)$ выполняются равенства

$$a(x)^2=b(x), \tag{4.8}$$

$$a(x)^3+L_3a(x)f(x)=1-\wp'(z_3)f(x)^3, \tag{4.9}$$

$$b(x)(b(x)+L_3f(x))^2=(1-\wp'(z_3)f(x)^3)^2. \tag{4.10}$$

Пользуясь леммой 3 и формулой (см. [12; 18.4.7])

$$\zeta(2z)=2\zeta(z)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\,,$$

находим, что

$$\alpha_3=\frac{2\zeta(z_3)-\zeta(2z_3)}{3}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{\wp''(z_3)}{\wp'(z_3)}=-\frac{L_3}{6}\,,\qquad \alpha_3+\mu_3=-\frac{L_3}{2}\,.$$

Поэтому равенство (4.8) следует из (2.4) и (4.1).

Из формулы удвоения (см. [12; 18.4.5])

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 \tag{4.11}$$

следует, что условие $\wp(2z_3) = \wp(z_3)$, характеризующее точки третьего порядка (см. лемму 1), можно переписать в виде

$$12\wp(z_3)\wp'(z_3)^2 = \wp''(z_3)^2. \tag{4.12}$$

Выражая $\wp(x)$ и $\wp'(x)$ из равенств (4.2), (1.4) и подставляя их в уравнение Вейерштрасса (1.16) с учетом условий

$$\wp'(z_3)^2 = 4\wp(z_3)^3 - g_2\wp(z_3) - g_3 = 0$$

и (4.12), получаем уравнение (4.9). Из равенств (2.4) и $b(x) = f(x)^4(\wp(x) - \wp(z))^2$ тем же способом получается уравнение (4.10).

Из (2.5) находим, что при $\alpha_3 = -L_3/6$ выполняются равенства $L_3 = 3A_1$, $\wp'(z) = -A_1^3 - 3A_3$. Поэтому при переходе к рядам $A_3(t) = a_3(f_3^{-1}(t))$, $B_3(t) = b_3(f_3^{-1}(t))$ уравнения (4.9) и (4.10) принимают соответственно вид (1.13) и (1.14). Уравнение (1.12) является непосредственным следствием (4.8).

Замечание 2. В работе [6] было доказано, что равенство $A(t)^2 = B(t)$ является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы экспонента формальной группы Бухштабера (1.5) была эллиптической функцией уровня 3. Это нетрудно проверить, пользуясь равенствами (2.5)–(2.7). Приравнивая к нулю коэффициенты при t^2 и t^4 в формуле $A(t)^2 - B(t) = 0$, получаем равенства $\wp(z) = 3\alpha^2$ и $\wp''(z) + 6\alpha\wp'(z) = 0$, из которых следует, что точка z удовлетворяет условию (4.12), характеризующему точки третьего порядка.

5. Уровень 4.

Лемма 6. *Пусть z_4 – точка порядка 4. Тогда*

$$a_4(x)^2 = \frac{\wp(x - z_4) - \wp(2z_4)}{\wp(z_4) - \wp(2z_4)}, \tag{5.1}$$

$$f_4(x)^4 = \frac{1}{(\wp(x) - \wp(z_4))^2} \cdot \frac{\wp(x - z_4) - \wp(2z_4)}{\wp(z_4) - \wp(2z_4)}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Как и при $n = 3$ ограничимся доказательством первого равенства, поскольку второе является следствием первого и определения функции $a(x)$. По лемме 2

$$f_4(x)^4 = \frac{\sigma(x)^4\sigma(z_4)^3\sigma(3z_4)}{\sigma(z_4 - x)^3\sigma(x + 3z_4)}.$$

Пользуясь формулой (4.3) находим, что

$$a_4(x)^2 = f_4(x)^4(\wp(x) - \wp(z_4))^2 = \frac{\sigma(3z_4)\sigma(x + z_4)^2}{\sigma(z_4)\sigma(x + 3z_4)\sigma(z_4 - x)}.$$

Применяя к обеим частям равенства $\wp(z_4) - \wp(x) = \wp(3z_4) - \wp(x)$ формулу (3.1), находим, что

$$\frac{\sigma(3z_4)\sigma(x+z_4)^2}{\sigma(z_4)\sigma(x+3z_4)\sigma(z_4-x)} = -\frac{\sigma(x-3z_4)\sigma(x+z_4)\sigma(z_4)}{\sigma(x-z_4)^2\sigma(3z_4)}\,.$$

Значит,

$$a_4(x)^2 = -\frac{\sigma(x-3z_4)\sigma(x+z_4)\sigma(z_4)}{\sigma(x-z_4)^2\sigma(3z_4)} = \frac{\wp(x-z_4)-\wp(2z_4)}{\wp(z_4)-\wp(2z_4)}\,.$$

Лемма 7. *Имеем*

$$\alpha_4 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\wp''(z_4)}{\wp'(z_4)} = \frac{\wp'(z_4)^3}{\wp''(z_4)^2-\wp'(z_4)\wp'''(z_4)}\,.$$

Доказательство. По лемме 3

$$\alpha_4 = \frac{3\zeta(z_4)-\zeta(3z_4)}{4}\,.$$

Пользуясь тождеством (см. [12; 18.4.9])

$$\zeta(3z) = 3\zeta(z) + \frac{4\wp'(z)^3}{\wp'(z)\wp'''(z)-\wp''(z)^2}$$

и равенством (5.7), получаем нужное представление для α_4.

Доказательство теоремы 4. Проверим сначала, что при $\mu = -L_4/4$ функции $f(x) = f_4(x)$, $a(t) = a_4(t)$ и $b(t) = b_4(t)$ удовлетворяют равенствам

$$\wp'(z)a(t)^4(a(t)^2-1)^2 + L_4^3 b(t)^2(a(t)^3-b(t)^2) = 0, \tag{5.3}$$

$$(a(t)^2-1)^2 = L_4^2 f(t)^2 a(t) + \wp''(z)f(t)^4, \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} &b(t)L_4^2(b(t)+L_4f(t))^3 - b(t)f(t)^2L_4\wp'(z_4)(2b(t)+f(t)L_4)\\ &\quad= (1-\wp''(z)f(t)^4)(L_4^2-\wp'(z_4)^2f(t)^4). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Из формулы (см. [12; 18.4.6])

$$\wp'(2z) = \frac{-4\wp'(z)^4+12\wp(z)\wp'(z)^2\wp''(z)-\wp''(z)^3}{4\wp'(z)^3}$$

следует, что условие $\wp'(2z_4) = 0$, характеризующее точки порядка 4 (см. лемму 1), можно переписать в виде

$$12\wp(z_4)\wp'(z_4)^2\wp''(z_4) = 4\wp'(z_4)^4 + \wp''(z_4)^3. \tag{5.6}$$

Поскольку $12\wp(z)\wp'(z) = \wp'''(z)$, это равенство можно также переписать в виде

$$\wp'(z_4)\wp''(z_4)\wp'''(z_4) = 4\wp'(z_4)^4 + \wp''(z_4)^3. \tag{5.7}$$

Из (4.11) следует, что формула (5.7) равносильна равенству

$$\wp(2z_4) - \wp(z_4) = -\frac{\wp'(z_4)^2}{\wp''(z_4)}\,. \tag{5.8}$$

Из формул (5.6)–(5.8) следует, что все необходимые параметры можно выразить через $\wp'(z_4)$ и $\wp''(z_4)$:

$$\wp(z_4) = \frac{4\wp'(z_4)^4 + \wp''(z_4)^3}{12\wp'(z_4)^2\wp''(z_4)}, \qquad \wp(2z_4) = \wp(z_4) - \frac{\wp'(z_4)^2}{\wp''(z_4)},$$
$$g_2 = 12\wp(z_4)^2 - 2\wp''(z_4), \qquad g_3 = 4\wp(z_4)^3 - g_2\wp(z_4) - \wp'(z_4)^2.$$

Для доказательства равенства (5.4) остается применить к $\wp(x - z_4)$ теорему сложения (см. [12; 18.4.1]):

$$\wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2,$$

выразить из равенств (1.4) и (5.1) величины $\wp(x)$, $\wp'(x)$, и подставить их в уравнение Вейерштрасса (1.16).

При $z = z_4$, $\mu = \alpha_4 = -L_4/4$ равенство (2.4) примет вид

$$\frac{b_4(x)}{f_4(x)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(x) + \wp'(z_4)}{\wp(x) - \wp(z_4)} + \frac{\wp''(z_4)}{\wp'(z_4)}\right).$$

Исключая из него и уравнения (5.2) величины $\wp(x)$, $\wp'(x)$, приходим к соотношению (5.5), связывающему $b_4(x)$ и $f_4(x)$.

Из (2.5) и (1.4) следует, что

$$\frac{b_4(x)^2}{a_4(x)} = \frac{b_4(x)^2}{f_4(x)^2} \cdot \frac{f_4(x)^2}{a_4(x)} = \frac{1}{4(\wp(x) - \wp(z_4))}\left(\frac{\wp'(x) + \wp'(z_4)}{\wp(x) - \wp(z_4)} + \frac{\wp''(z_4)}{\wp'(z_4)}\right)^2.$$

Исключая из этого равенства и равенства (5.1) величины $\wp(x)$, $\wp'(x)$, приходим к соотношению (5.3), связывающему $a_4(x)$ и $b_4(x)$.

Из формулы (2.5) находим, что при $\mu = \alpha_4 = -L_4/4$ выполняются равенства

$$L_4 = -2A_1, \qquad B_1 = \frac{A_1}{2}, \qquad \wp'(z_4) = -\frac{A_1^3}{2} - 4A_3, \qquad \wp''(z_4) = A_1^4 + 8A_1A_3.$$

Поэтому при переходе к рядам $A_4(t) = a_4(f_4^{-1}(t))$ и $B_4(t) = b_4(f_4^{-1}(t))$ уравнения (5.3)–(5.5) принимают соответственно вид (1.17)–(1.19).

Замечание 3. Как было отмечено выше, в случаях $n = 2$ и $n = 3$ уравнения $A(t) = 1$ и $A(t)^2 = B(t)$ являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для того, чтобы экспонента формальной группы Бухштабера (1.5) была эллиптической функцией уровня 2 или 3 соответственно (см. замечания 1 и 2). Рассмотрим уравнение (1.17), связывающее между собой ряды $A(t)$ и $B(t)$ при $n = 4$. Оно будет достаточным условием для того, чтобы экспонента формальной группы Бухштабера (1.5) была эллиптической функцией уровня 4, если дополнительно потребовать, что $A(t) \neq 1$. Действительно, если $A_1 = 2\alpha = 0$ и $A_3 = 0$, то f – это эллиптическая функция уровня 2 и $A(t) = 1$. Если $A_1 = 2\alpha = 0$ и $A_3 \neq 0$, то $C_3 \neq 0$ и из уравнения (1.17) снова получаем, что $A(t) = 1$. Если же $A_1 = 2\alpha \neq 0$, то, пользуясь формулами (2.5)–(2.7) и приравнивая к нулю коэффициенты при t, t^2 и t^4 в равенстве (1.17), находим, что

$$\mu = \alpha, \qquad 16\alpha^3 - \wp'(z) - 12\alpha\wp(z) = 0, \qquad \alpha = -\frac{\wp''(z)}{4\wp'(z)}.$$

Из двух последних соотношений следует справедливость условия (5.6), характеризующего точки порядка 4.

6. Алгебраическое соотношение для универсальной формальной группы Бухштабера.

Доказательство теоремы 5. Проверим сначала, что при $\mu = -\alpha$ функции $a(x)$ и $b(x)$ связаны равенством

$$a(x)(a(x) - b(x)^2 + 3\wp(z)f(t)^2) = f(x)^3\left(b(x)\wp'(z) - \frac{\wp''(z)}{2}f(x)\right). \tag{6.1}$$

Выразим из равенств (1.4) и (2.4) значения $\wp(x)$ и $\wp'(x)$:

$$\wp(x) = \frac{a(x)}{f(x)^2} + \wp(z),$$
$$\wp'(x) = -\frac{2a(x)b(x)}{f(x)^3} - \wp'(z).$$

Подставляя их в уравнение Вейерштрасса (1.16), получаем, что параметр g_3 сокращается. Заменяя g_2 по формуле $g_2 = 12\wp(z)^2 - 2\wp''(z)$, приходим к соотношению (6.1).

Из формул (2.5)–(2.7) следует, что при $\mu = -\alpha$ выполняются равенства

$$3\wp(z) = B_1^2 + 2B_2, \qquad \wp'(z) = -2B_1B_2 - 3A_3,$$
$$\frac{\wp''(z)}{2} = 2B_4 + 2B_1^2B_2 + 9B_1A_3 + B_2^2.$$

Поэтому при переходе к рядам $A(t) = a(f^{-1}(t))$, $B(t) = b(f^{-1}(t))$ уравнение (6.1) примет вид (1.20).

Замечание 4. Формулы (1.20) и (6.1), доказанные при $B_1 = A_1/2$ ($\mu = -\alpha$), нельзя использовать одновременно с соотношениями (1.12)–(1.14) и (1.17)–(1.19), полученными для уровней $n = 3$ ($B_1 = 2A_1$, $\mu = 2\alpha$) и $n = 4$ ($2B_1 = 3A_1$, $\mu = \alpha$) соответственно. При $n = 2$ противоречий не возникает, поскольку равенства $A_2(t) = 1$ и $B_2(t)^2 = 1 + 2B_2t^2 + (B_2^2 + 2B_4)t^4$ получены при условиях $\mu = \alpha_2 = 0$, которые не противоречат равенству $\mu = -\alpha$.

Автор благодарит Е. Ю. Бунькову за плодотворное обсуждение полученных результатов и ценные замечания к первоначальному тексту статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.

[2] И. М. Кричевер, “Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:4 (1980), 45–54.

[3] В. М. Бухштабер, “Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы”, *УМН*, **45**:3 (273) (1990), 185–186.

[4] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric Topology*, Math. Surveys Monogr., **204**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[5] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, *Manifolds and Modular Forms*, Bonn, 1994, http://hirzebruch.mpim-bonn.mpg.de/id/eprint/110.

[6] J. B. von Oehsen, “Elliptic genera of level N and Jacobi polynomials”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122**:1 (1994), 303–312.

[7] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, “Универсальная формальная группа, определяющая эллиптическую функцию уровня 3”, *Чебышевский сб.*, **16**:2 (2015), 66–78.

[8] В. М. Бухштабер, А. В. Устинов, “Кольца коэффициентов формальных групп”, *Матем. сб.*, **206**:11 (2015), 19–60.

[9] Е. Ю. Бунькова, В. М. Бухштабер, А. В. Устинов, “Кольца коэффициентов формальных групп Тейта, задающих роды Кричевера”, *Алгебра, геометрия и теория чисел*, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения академика Владимира Петровича Платонова, Тр. МИАН, **292**, МАИК, М., 2016, 43–68.

[10] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, “Формальные группы Кричевера”, *Функц. анализ и его прил.*, **45**:2 (2011), 23–44.

[11] Е. Ю. Бунькова, “Эллиптическая функция уровня 4”, *Современные проблемы математики, механики и математической физики. II*, Сборник статей, Тр. МИАН, **294**, МАИК, М., 2016, 216–229.

[12] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, М., 1979.

А. В. Устинов
Тихоокеанский государственный университет,
г. Хабаровск;
Хабаровское отделение Института прикладной
математики Дальневосточного отделения
Российской академии наук
E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Поступило
16.10.2016
Исправленный вариант
23.01.2017