ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2018, том 481, № 2, с. 131–135

МАТЕМАТИКА

УДК 517.52

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

© 2018 г. А. В. Устинов[1,2,*], М. А. Королев[3,**]

Представлено академиком РАН С.В. Конягиным 08.02.2018 г.

Поступило 12.03.2018 г.

Найдена функция распределения длин дуг между соседними рациональными точками единичной окружности, знаменатели которых не превосходят заданной величины.

DOI: 10.31857/S086956520001188-9

Целью настоящего сообщения является исследование распределения точек, лежащих на единичной окружности и имеющих рациональные координаты. Введём ряд необходимых обозначений.

Пусть $Q \geq 2$ и (x_r, y_r), $r = 1, 2, \ldots, N$, – все точки единичной окружности, координаты которых – положительные несократимые дроби со знаменателями, не превосходящими Q, упорядоченные по возрастанию величины $\varphi_r = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y_r}{x_r}\right)$. Пусть далее $\theta_r = \varphi_r - \varphi_{r-1}$, где $2 \leq r \leq N$. Пусть, наконец, $t > 0$ – произвольное фиксированное число и $\mu(Q;t)$ – количество тех пар соседних точек (x_{r-1}, y_{r-1}), (x_r, y_r), для которых выполняется неравенство $\theta_r \leq \dfrac{t}{Q}$. Основным результатом является

Т е о р е м а. *При любом фиксированном $t > 0$ и $Q \to +\infty$ справедлива следующая асимптотическая формула*:

$$\mu(Q;\,t) = \frac{Q}{\pi}\int_0^t h(v)\,dv + O(T),\ \textit{где}\ T = Q^{5/6}(\ln Q)^{4/3},$$

постоянная в знаке O зависит от t, а непрерывная функция h задаётся равенствами

$$h(v) \equiv 0 \ \textit{при}\ 0 \leq v \leq \sqrt{2};$$

$$h(v) = v^{-2}(2\ln v - \ln 2) \ \textit{при}\ \sqrt{2} \leq v \leq 2;$$

$$h(v) = v^{-2}(4\ln v - 3\ln 2) \ \textit{при}\ 2 \leq v \leq 4;$$

$$h(v) = v^{-2}\left(2\ln v - 4\ln\left(1 + \sqrt{1 - 4v^{-1}}\right) + \ln 2\right)$$

$$\textit{при}\ 4 \leq v \leq 2\sqrt{2} + 2;$$

$$h(v) = v^{-2}(2\ln v - \ln 2) \ \textit{при}\ 2\sqrt{2} + 2 \leq v \leq 8;$$

$$h(v) = v^{-2}\left(11\ln 2 - 2\ln v - 8\ln\left(1 + \sqrt{1 - 8v^{-1}}\right)\right)$$

$$\textit{при}\ 8 \leq v \leq 3\sqrt{2} + 4;$$

$$h(v) = v^{-2}\left(4\ln 2 - 4\ln\left(1 + \sqrt{1 - 8v^{-1}}\right)\right) \ \textit{при}\ v \geq 3\sqrt{2} + 4.$$

З а м е ч а н и е. Можно показать, что для числа $N = N(Q)$ точек (x_r, y_r) при $Q \to +\infty$ справедлива формула $N(Q) = \dfrac{Q}{\pi} + O(\sqrt{Q}\ln Q)$. Поэтому выражение для $\mu(Q;\,t)$ может быть представлено в виде

$$\mu(Q;\,t) = N(Q)\int_0^t h(v)\,dv + O(T).$$

Ниже приводится схема доказательства теоремы и необходимые для этого вспомогательные утверждения.

Координаты (x, y) всех рациональных точек единичной окружности с условиями $x > 0$, $y > 0$ задаются равенствами

$$x = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \qquad (1)$$

где $1 \leq a \leq b - 1$ – произвольные целые числа с условием $(a, b) = 1$. Если a, b имеют разную чётность, то дроби (1) несократимы; если же a, b – нечётные, то числитель и знаменатель каждой из дробей (1) имеют наибольшим общим делителем число 2.

[1] *Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск*

[2] *Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской Академии наук, Хабаровск*

[3] *Математический институт им. В.А.Стеклова Российской Академии наук, Москва*

**E-mail: ustinov.alexey@gmail.com*

***E-mail: korolevma@mi.ras.ru*

Для целого $Q \geq 2$ рассмотрим ряд несократимых дробей $\frac{a}{b}$, упорядоченных по возрастанию и таких, что $a^2 + b^2 \leq Q$, $1 \leq a \leq b-1$. Добавим к нему дроби $\frac{0}{1} = 0$, $\frac{1}{1} = 1$ и обозначим получившийся ряд через $\mathcal{F}_Q$.

Ряд $\mathcal{F}_Q$ является аналогом классического ряда Фарея $\mathcal{F}_Q = \left\{\frac{a}{b},\ 1 \leq a \leq b \leq Q, (a, b) = 1\right\}$ обладает сходными с ним свойствами. В частности, $\mathcal{F}_Q$ может быть построен из ряда $\mathcal{F}_{Q-1}$ добавлением между соседними дробями $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ всех возможных медиант $\frac{a+c}{b+d}$, удовлетворяющих условию $(a+c)^2 + (b+d)^2 \leq Q$. Кроме того, соседние дроби $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ ряда $\mathcal{F}_Q$ удовлетворяют равенству $ad - bc = 1$.

В силу сказанного, все рациональные точки (x, y) единичной окружности с условиями $x, y > 0$, знаменатели которых не превосходят Q, получим с помощью формул (1), заставляя a и b пробегать натуральные числа, отвечающие одному из условий

а) $(a, b) = 1,\ 1 \leq a \leq b-1,\quad a^2 + b^2 \leq Q;$

б) $(a, b) = 1,\ 1 \leq a \leq b-1,\ a, b \equiv 1 \pmod 2,$

$$Q < a^2 + b^2 \leq 2Q,$$

или, что то же, одному из условий

а) $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_Q;$

б) $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_{2Q} \setminus \mathcal{F}_Q,\quad a, b \equiv 1 \pmod 2.$

Обозначим через Φ_Q ряд из несократимых дробей $\frac{a}{b}$, расположенных по возрастанию и отвечающих одному из условий а), б). Если $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ — соседние дроби в Φ_Q, то можно показать, что разность $\delta = ad - bc$ может принимать два значения: 1 и 2. Согласно (1),

$$x = \frac{2}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} - 1,\quad y = \frac{2\left(\frac{a}{b}\right)}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2},$$

т.е. x и y являются строго монотонными функциями величины $\frac{a}{b}$. Следовательно, соседним дробям $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ ряда Φ_Q отвечают соседние точки ряда (x_r, y_r), $1 \leq r \leq N$, и обратно. Поэтому исходная задача сводится к нахождению соответствующей функции распределения для ряда Φ_Q.

Для дальнейшего пары $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ соседних дробей ряда Φ_Q разбиваются на 3 семейства — A, B, C — в зависимости от того, будут ли 2, 1 или 0 из этих дробей принадлежать ряду $\mathcal{F}_Q$. Некоторые из этих семейств, в свою очередь, удобно разбить на классы и подклассы. Именно, семейство A составят классы A_1, A_2, A_3, отвечающие, соответственно, условиям

1) $\frac{a+c}{b+d} \notin \mathcal{F}_{2Q};$

2) $\frac{a+c}{b+d} \in \mathcal{F}_{2Q}$, но числитель и знаменатель всех медиант вида $\frac{pa+qc}{pb+qd}$, $(p, q) = 1$, $p, q \geq 1$, добавляемых между $\frac{c}{d}$ и $\frac{a}{b}$, имеют разную чётность;

3) $\frac{a+c}{b+d} \in \mathcal{F}_{2Q}$, причём среди добавляемых между $\frac{c}{d}$ и $\frac{a}{b}$ медиант указанного выше вида имеются дроби с нечётными числителем и знаменателем, но они не принадлежат $\mathcal{F}_{2Q}$.

Далее, семейство B состоит из классов B_1 и B_2, отвечающих, соответственно, условиям $ad - bc = 1$ и $ad - bc = 2$. Наконец, семейство C состоит из единственного класса, обозначаемого той же буквой.

Классы A_2 и A_3 разбиваются на подклассы $A_{2,1}$, $A_{2,2}$ и $A_{3,1}$, $A_{3,2}$, которые отвечают, соответственно, условиям

$$c < a,\quad d < b,\quad c, d \equiv 1 \pmod 2,$$
$$a \leq c,\quad b < d,\quad a, b \equiv 1 \pmod 2$$

и

$$c < a,\quad d < b,\quad a, b \equiv 1 \pmod 2,$$
$$a \leq c,\quad b < d,\quad c, d \equiv 1 \pmod 2.$$

Аналогично, классы B_1 и B_2 разобьём на подклассы $B_{1,1}$, $B_{1,2}$ и $B_{2,1}$, $B_{2,2}$, отвечающие условиям

$$\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_{2Q} \setminus \mathcal{F}_Q \text{ (для } B_{1,1} \text{ и } B_{2,1}),$$

$$\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_Q \text{ (для } B_{1,2} \text{ и } B_{2,2}).$$

Следующее утверждение позволяет по заданной дроби ряда Φ_Q отыскать числитель и знаменатель соседней к ней дроби.

Л е м м а 1. *Имеют место следующие утверждения*:

1. *Если* $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_Q$, *то дробь* $\frac{c}{d}$ *— соседняя слева к* $\frac{a}{b}$ *в* Φ_Q *и пара* $\left(\frac{c}{d}; \frac{a}{b}\right)$ *принадлежит классу X тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$ad \equiv \delta \pmod b, \; c = \frac{ad - \delta}{b},$$

$$D_1 < d \le D_2, \; D_r = bf_r + \frac{a\delta}{R},$$

где

$$f_1(a,b) = \sqrt{\frac{2Q}{R} - \frac{1}{R^2}} - 1, \; f_2(a,b) = \sqrt{\frac{Q}{R} - \frac{1}{R^2}},$$

$\delta = 1$ *в случае* $X = A_1$;

$$f_1(a, b) = \max\left(1, \sqrt{\frac{Q}{R} - \frac{1}{R^2}} - 1\right),$$

$$f_2(a, b) = \min\left(\sqrt{\frac{Q}{R} - \frac{1}{R^2}}, \sqrt{\frac{2Q}{R} - \frac{1}{R^2}} - 1\right),$$

$\delta = 1$ *в случае* $X = A_{2,2}$, *и при этом необходимо* $a, b \equiv 1 \pmod 2$;

$$f_1(a, b) = \max\left(\sqrt{\frac{Q}{R} - \frac{1}{R^2}} - 1, \sqrt{\frac{Q}{2R} - \frac{1}{R^2}} - \frac{1}{2}\right),$$

$$f_2(a, b) = \min\left(1, \sqrt{\frac{2Q}{R} - \frac{1}{R^2}} - 1\right),$$

$\delta = 1$ *в случае* $X = A_{3,1}$ *и при этом* $a, b \equiv 1 \pmod 2$;

$$f_1(a, b) = \max\left(\sqrt{\frac{Q}{R} - \frac{1}{R^2}} - 1, \sqrt{\frac{2Q}{R} - \frac{1}{R^2}} - 2\right),$$

$$f_2(a, b) = \sqrt{\frac{2Q}{R} - \frac{1}{R^2}}$$

$\delta = 1$ *в случае* $X = B_{1,2}$, *и при этом* $d \equiv \gamma \pmod{2b}$;

$$f_1(a, b) = 2\sqrt{\frac{Q}{R} - \frac{1}{R^2}} - 1,$$

$$f_2(a, b) = \min\left(\sqrt{\frac{2Q}{R} - \frac{4}{R^2}}, 2\sqrt{\frac{2Q}{R} - \frac{1}{R^2}} - 1\right),$$

$\delta = 2$ *в случае* $X = B_{2,2}$ *и при этом* $d \equiv \gamma \pmod{2b}$;

(*всюду выше* $R = a^2 + b^2$, $\gamma = \gamma(a, b)$ *— некоторые числа с условием* $(\gamma, 2b) = 1$, *в разных случаях, вообще говоря, разные*).

2. *Если* $\frac{c}{d} \in \mathcal{F}_Q$, *то дробь* $\frac{a}{b}$ *— соседняя справа к* $\frac{c}{d}$ *в* Φ_Q, *и пара* $\left(\frac{c}{d}; \frac{a}{b}\right)$ *принадлежит классу Y тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$bc \equiv -\delta \pmod d, \; a = \frac{bc + \delta}{d},$$

$$B_1 < b \le B_2, \; B_r = dg_r + \frac{\delta c}{R},$$

где выражения для функции $g_r = g_r(c, d)$ *получаются заменой a на c, b на d из соответствующих выражений* $f_r(a, b)$, *отвечающих в случае* $Y = A_{2,1}$ *классу* $X = A_{2,2}$, *в случае* $Y = A_{3,2}$ *— классу* $X = A_{3,1}$, *в случае* $Y = B_{1,1}$ *— классу* $X = B_{1,2}$, *в случае* $Y = B_{2,1}$ *— классу* $X = B_{2,2}$. *Условия* $a, b \equiv 1 \pmod 2$ *случае* $X = A_{2,2}, A_{3,1}$ *преобразуются в условия* $c, d \equiv 1 \pmod 2$ *в случаях* $Y = A_{2,1}, A_{3,2}$, *а условия* $d \equiv \gamma \pmod{2b}$ *в условия вида* $b \equiv \gamma \pmod{2d}$, *где* $\gamma = \gamma(c, d)$ *— некоторые числа, взаимно простые с 2d и в разных случаях, вообще говоря, разные.*

3. *Если* $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_{2Q} \setminus \mathcal{F}_Q$, *то дробь* $\frac{c}{d}$ *является соседней слева к* $\frac{a}{b}$ *в* Φ_Q *и пара* $\left(\frac{c}{d}; \frac{a}{b}\right)$ *принадлежит классу C тогда и только тогда, когда выполнены условия* $a, b \equiv 1 \pmod 2$, $ad \equiv 2 \pmod b$, *где* $c = \frac{ad - 2}{b}$, $D_1 < d \le D_2$,

$$D_1(a, b) = 2b\sqrt{\frac{Q}{4R} - \frac{1}{R^2}} + \frac{2a}{R},$$

$$D_2(a, b) = 2b\sqrt{\frac{Q}{2R} - \frac{1}{R^2}} + \frac{2a}{R},$$

$R = a^2 + b^2$, *и при этом* $d \equiv \gamma \pmod{2b}$, *где* $(\gamma, 2b) = 1$.

Пусть φ', φ'' — углы наклона прямых, соединяющих начало координат с точками (1) единичной окружности, которые отвечают соседним дробям ряда Φ_Q. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{2cd}{d^2 - c^2}, \; \operatorname{tg} \varphi'' = \frac{2ab}{b^2 - a^2},$$

откуда, полагая $\theta = \varphi'' - \varphi'$, находим: $\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\delta}{ac + bd}$. Значит, отыскание распределения длин дуг θ сводится к нахождению асимптотики для числа пар $\left(\frac{c}{d}; \frac{a}{b}\right)$, отвечающих условию $\frac{\delta}{ac + bd} < \frac{t}{Q}$, где $t > 0$ — произвольное фиксированное число.

Положим $\lambda = \dfrac{\delta}{t}$, $x = \lambda Q$; тогда указанное выше условие примет вид

$$ac + bd > x. \tag{2}$$

Обозначим через $W_r(Q, \lambda)$ количество пар $\left(\dfrac{c}{d}; \dfrac{a}{b}\right)$, отвечающих (2) и принадлежащих классу X_r, где $X_1 = A_1$, $X_2 = A_{2,1}$, $X_3 = A_{2,2}$, $X_4 = A_{3,1}$, $X_5 = A_{3,2}$, $X_6 = B_{1,1}$, $X_7 = B_{1,2}$, $X_8 = B_{2,1}$, $X_9 = B_{2,2}$, $X_{10} = C$.

В случаях $r = 1, 3, 4, 7, 9$ условие (2) примет вид $d > \dfrac{bx + a\delta}{R}$, $R = a^2 + b^2$, а в случаях $r = 2, 5, 6, 8$ — вид $b > \dfrac{dx - c\delta}{R}$, $R = c^2 + d^2$. Соответственно, условия принадлежности к определённому классу (подклассу) при одновременном выполнении (2) получим из формул леммы 1, добавляя под знаки максимума в выражениях для f_1, g_1 величины $\dfrac{x}{R}$ (или с заменой f_1, g_1 максимумом из двух величин в случаях классов (подклассов) A_1, $B_{2,2}$, $B_{2,1}$ и C).

Преобразуя величины $W_r(Q, \lambda)$ с помощью леммы 1 и теоремы 1 из работы [1] приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. *При фиксированном $\lambda > 0$ и $Q \to +\infty$ справедливы равенства*

$$W_r(Q, \lambda) = \kappa_r j_r N(Q) + O(T),$$

где $\kappa_1 = \dfrac{3}{2}$, $\kappa_r = \dfrac{1}{2}$ *для* $2 \le r \le 7$, $\kappa_r = \dfrac{1}{4}$ *для* $8 \le r \le 10$, *постоянные в знаках O зависят от* λ,

$$j_r(\lambda) = \int_0^{\xi} [h_1(u) < h_2(u)] \cdot (h_2(u) - h_1(u))\,du,$$

$$\xi = 1 \text{ для } 1 \le r \le 9,\ \xi = \sqrt{2} \text{ для } r = 10,$$

$$h_1(u) = \max\left(\sqrt{2} - u, \frac{\lambda}{u}\right), h_2(u) \equiv 1 \text{ для } r = 1;$$

$$h_1(u) = \max\left(u, 1 - u, \frac{\lambda}{u}\right), \ h_2(u) = \min\left(1, \sqrt{2} - u\right) \text{ для } r = 2, 3;$$

$$h_1(u) = \max\left(1 - u, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{u}{2}, \frac{\lambda}{u}\right), h_2(u) = \min\left(u, \sqrt{2} - u\right) \text{ для } r = 4, 5;$$

$$h_1(u) = \max\left(1, \sqrt{2} - 2u, \frac{\lambda}{u}\right), h_2(u) \equiv \sqrt{2} \text{ для } r = 6, 7;$$

$$h_1(u) = \max\left(2 - u, \frac{\lambda}{u}\right), h_2(u) = \min\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - u\right) \text{ для } r = 8, 9;$$

$$h_1(u) = \max\left(1, \frac{\lambda}{u}\right), \ h_2(u) \equiv \sqrt{2} \text{ для } r = 10,$$

а величина [A] *считается равной единице, если условие* A *истинно, и равной нулю в противном случае.*

Определяя $W(Q, \lambda)$ как число соседних пар ряда Φ_Q с условием $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \le \dfrac{1}{\lambda Q}$, с помощью леммы 2 находим:

$$W(Q, \lambda) = j(\lambda) N(Q) + O(T),$$

где $j(\lambda) = \dfrac{3}{2} j_1(\lambda) + j_2(\lambda) + j_4(\lambda) + j_6(\lambda) + \dfrac{1}{2} j_8(2\lambda) + \dfrac{1}{4} j_{10}(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} f(u)\,du$, $f(u) = -j'(\lambda)$. Замечая, что $\dfrac{\theta}{2} \le \operatorname{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \le \dfrac{\theta}{2} + \theta^3$ при $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, для числа $V(Q, \lambda)$ соседних пар ряда Φ_Q с условием $\theta \le \dfrac{2}{\lambda Q}$ получим неравенства

$$W(Q, \lambda) \le V(Q, \lambda) \le W(Q, v), \ v = \lambda + O\left(\lambda^{-1} Q^{-2}\right).$$

Пользуясь непрерывностью $j'(\lambda)$ и полагая $t = \dfrac{2}{\lambda}$, получим

$$\mu(Q; t) = V(Q, \lambda) = j(\lambda) N(Q) + O(T),$$

причём

$$j(\lambda) = \int_{2/t}^{+\infty} f(u)\,du = \int_0^t h(v)\,dv,$$

где $h(v) = 2v^{-2} f\left(2v^{-1}\right)$. Теперь искомое утверждение следует из явных формул для функции f, которые получаются прямым вычислением величин $j_r(\lambda)$ в лемме 2.

Замечание 2. Формулы теоремы интересно сопоставить с результатами статьи [2] и, в частности, с формулами следствия 0.4 теоремы 0.3 для функции распределения угла между соседними отрезками, соединяющими начало координат с примитивными точками в круге растущего радиуса.

М.А. Королёв выполнил работу при поддержке Программы Президиума РАН № 01 “Фундаментальная математика и её приложения”

(PRAS-18-01). А.В. Устинов выполнил работу в рамках госзадания 1.557.2016/1.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Устинов А.В.* О числе решений сравнения $xy \equiv l(\mathrm{mod}\, q)$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 5. С. 186–216.
2. *Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A.* Distribution of Lattice Points Visible from the Origin // Communs Math. Phys. 2000. V. 213. P. 433–470.