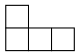
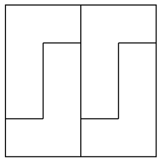
Городская олимпиада по математике
г. Хабаровск, 1999 год

9 КЛАСС

Задача 1. Из какого минимального количества фигур  (составлены из одинаковых квадратных клеточек) можно сложить квадрат?

Решение. Докажем, что решение, представленное на рисунке, дает наименьшее число фигур.



Будем считать, что площадь каждой клеточки равна 1. Тогда площадь фигурки равна 4 и поэтому площадь составленного из них квадрата кратна 4. Поэтому сторона квадрата — четное число. Поскольку сторона длиной 2 не подходит, то представленное на рисунке разбиение квадрата 4×4 решает задачу.

Задача 2. Пусть x_1 — положительное число из интервала $(0, 1)$. Составим последовательность чисел $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ по правилу $x_{k+1} = x_k - x_k^2$ $(k = 1, 2, \dots)$. Доказать, что для любого натурального n

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1.$$

Решение. По условию $x_k^2 = x_k - x_{k+1}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Складывая все эти n неравенств, получим

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{n+1}.$$

Осталось только заменить, что все $x_k \in (0, 1)$.

Задача 3. Прямая, проходящая через середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и N. Доказать, что

$$S_{DCM} = S_{ABN}.$$

Решение. Площади треугольников AMN и CMN равны, поскольку у них равны высоты, опущенные на AC (MN делит AC пополам!). По той же причине равны площади треугольников DMN и BMN. Отсюда следует равенство площадей треугольников DCM и ABN.

Задача 4. Доказать, что если для всех вещественных x и y

$$f(x, y) = f(y, x) = f(x, x - y) = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3,$$

то $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Решение. По условию

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x, x - y) = f(x - y, x) = f((x - y) - x, x - y) = \\ = f(-y, x - y) = f(-y - (x - y), -y) = f(-x, -y) = \\ = -a_0x^3 - a_1x^2y - a_2xy^2 - a_3y^3. \end{aligned}$$

Поэтому $a_0 = -a_0, a_1 = -a_1, a_2 = -a_2, a_3 = -a_3$.
То есть, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

10 КЛАСС

Задача 1. Площадь прямоугольного треугольника равна S. Найти площадь треугольника с вершинами в основаниях перпендикуляров, проведенных из точки пересечения медиан данного треугольника на катеты и гипотенузу.

Решение. Пусть A — прямой угол треугольника ABC. Обозначим через A', B', C' основания перпендикуляров, опущенных из точки O (точка пересечения медиан) на стороны BC, AC, AB соответственно. Предположим, что угол при вершине C равен α. Тогда

$$A'OB' = 180^0 - \alpha, \qquad A'OC' = 90^0 - \alpha$$

и

$$S_{A'B'C'} = S_{B'OC'} + S_{A'OB'} + S_{A'OC'} =$$
$$= \frac{1}{2}B'O \cdot C'O + \frac{1}{2}A'O \cdot B'O \sin(180^0 - \alpha) + \frac{1}{2}A'O \cdot C'O \sin(90^0 + \alpha) =$$
$$= \frac{1}{2}B'O \cdot C'O + \frac{1}{2}A'O \cdot B'O \sin\alpha + \frac{1}{2}A'O \cdot C'O \cos\alpha.$$

Так как O делит медианы в отношении $1 : 2$, то

$$B'O = \frac{1}{3}AB, \qquad C'O = \frac{1}{3}AC, \qquad A'O = \frac{1}{3}AK,$$

где K — основание перпендикуляра из A на гипотенузу BC. Заметим, что

$$\frac{1}{2}A'O \cdot B'O \sin\alpha + \frac{1}{2}A'O \cdot C'O \cos\alpha = \frac{1}{18}AK(AB \sin\alpha + AC \cos\alpha) =$$
$$= \frac{1}{18}AK(BK + KC) = \frac{1}{18}AK \cdot BC.$$

Поэтому

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{18}AB \cdot AC + \frac{1}{18}AK \cdot BC = \frac{1}{9}S + \frac{1}{9}S = \frac{2}{9}S.$$

Задача 2. Пусть a, b, c — действительные числа, для которых

$$a + b + c > 0, \qquad ab + bc + ca > 0, \qquad abc > 0.$$

Доказать, что a, b, c — положительные.

Решение. Пусть $a \leq 0$. Тогда

$$0 = (a - a)(a - b)(a - c) = a^3 - (a + b + c)a^2 + (ab + bc + ca)a - abc < 0.$$

мы получили противоречие. Следовательно, $a > 0$. По той же причине b и c — положительные.

Задача 3. Доказать, что если при всех вещественных x и y

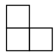
$$f(x, y) = f(y, x) = f(x, x - y) = a_1x^4y + a_2x^3y^2 + a_3x^2y^3 + a_4xy^4,$$

то $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

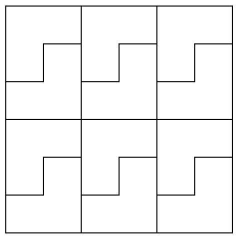
Решение. По условию

$$f(x,y) = f(x, x-y) = f(x-y, x) = f((x-y)-x, x-y) =$$
$$= f(-y, x-y) = f(-y-(x-y), -y) = f(-x,-y) =$$
$$= -a_1x^4y - a_2x^3y^2 - a_3x^2y^3 - a_4xy^4.$$

Поэтому $a_1 = -a_1, a_2 = -a_2, a_3 = -a_3, a_4 = -a_4$.
То есть, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

Задача 4. Из какого наименьшего количества фигурок  (составлена из одинаковых клеточек) можно сложить квадрат?

Решение. Площадь искомого квадрата кратна 3, так как он составлен из фигурок площади 3 (сторона клетки — 1). На самом деле, его площадь кратна 9б поскольку сторона квадрата — целое число. которое делится на 3. Поэтому решение с минимальным числом фигурок имеет вид



11 КЛАСС

Задача 1. Пусть при некоторых попарно различных действительных x, y, z

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = a. \qquad (*)$$

Доказать, что $a = \pm 1$.

Решение. По условию

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = a, \\ y + \frac{1}{z} = a, \\ z + \frac{1}{x} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0, \\ y - z + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 0, \\ z - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz(x-y) = y - x, \\ zx(y-z) = z - x, \\ xy(z-x) = x - y. \end{cases}$$

Перемножив последние три равенства, получим

$$x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x) = (y-z)(z-x)(x-y).$$

Поскольку x, y, z — попарно различны, то

$$x^2y^2z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad xyz = \pm 1.$$

Если $xyz = -1$, то для $x_1 = -x$, $y_1 = -y$, $z_1 = -z$, $a_1 = -a$, получим (*) с $x_1y_1z_1 = 1$. Следовательно, достаточно рассмотреть только случай

$$xyz = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{xy}.$$

Из первых двух выражений в (*) находим

$$\begin{cases} x+\frac{1}{y}=a, \\ y+xy=a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} xy+1=ay, \\ y+xy=a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (1-y)=a(y-1).$$

Если $y \neq 1$, то $a=-1$ и утверждение доказано. Пусть теперь $y=1$. При этом $x=\frac{1}{z}$. Из третьего равенства (*) получаем $z=a/2$. Подставляя это значение для z во второе выражение в (*), находим

$$1+\frac{2}{a}=a \quad \Rightarrow \quad a^2-a-2=0 \quad \Rightarrow \quad a=2,-1.$$

При $a=2 \quad z=1=y$, чего быть не может. Следовательно, $a=1$.

Задача 2. Пусть $x_1=1, x_2=2, x_3=3, \ldots, x_{n+2}=x_{n+1}+x_n, \ldots$ (последовательность Фибоначчи). Доказать, что любое натуральное число можно представить в виде суммы различных чисел из последовательности x_n.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Для $N=1=x_1$ утверждение верно (база индукции). Предположим, что оно верно для всех N, меньших натурального $M>1$. Докажем наше утверждение для M. Если M совпадает с некоторым x_n, то все доказано. Пусть теперь это не так и для некоторого k

$$x_k < M < x_{k+1}.$$

Тогда

$$M' = M - x_k < x_{k+1} - x_k = x_{k-1} < x_k.$$

По предположению индукции M' записывается в виде суммы различных элементов x_n и каждое слагаемое не превосходит x_k. Следовательно, $M=M'+x_k$ также допускает нужное представление.

Задача 3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Прямая, перпендикулярная CD и проходящая через D, пересекает AC в точке E. Найти EC, если $AD=1$.

Решение. Возьмем на CD точку F так, что $DF \parallel BC$. Поскольку треугольник ADF подобен треугольнику ABC, то $FD=AD=1$. Треугольник CFD равнобедренный, так как $\angle FDC=\angle BCD=\angle DCF$. Треугольник DFE также равнобедренный, поскольку $\angle FDE=90^0-\angle CDF=90^0-\angle DCF=\angle DEF$. Таким образом, $CF=FD=FE=1$, $CE=2$.

Задача 4. Пусть имеется 2001 различных предметов. Доказать, что из них можно выбрать нечетное число предметов столькими же способами, как и четное число предметов.

Решение. Если выбраны какие-то l предметов с нечетным l, то число оставшихся предметов будет $(2001-l)$ — четное число. Каждое разбиение всех 2001 предметов на два подмножества с нечетным количеством в первом и четным во втором устанавливает взаимно однозначное соответствие между нечетными выборками и четными. Следовательно, число выборок обоих типов одно и то же.