Городская олимпиада по математике
г. Хабаровск, 2001 год

9 КЛАСС

Задача 1. Найти все решения системы

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения следует, что $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$. Поскольку $x + y = 1$, то $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$. Если x и y одновременно больше нуля, то каждое из них строго меньше единицы. Тогда

$$1 = x^4 + y^4 < x + y = 1,$$

чего не может быть. В оставшихся случаях получаем пару решений

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Задача 2. Доказать, что любой треугольник можно разрезать на четыре равнобедренных треугольника.

Решение. Разрежем треугольник на два прямоугольных высотой, опущенной из вершины с наибольшим углом. Далее каждый из них разбивается на два равнобедренных медианой, соединяющей вершину прямого угла и середину гипотенузы.

Задача 3. Найти пять натуральный чисел n, которые нельзя представить в виде суммы простого числа и квадрата натурального.

Решение. Докажем, что среди чисел $2^2, 3^2, \ldots, k^2, \ldots, 14^2$ пять не представляются суммой простого и квадрата. Предположим, что это не так и $k^2 = p + l^2$, где p – простое и l – натуральное. Тогда

$$p = k^2 - l^2 = (k - l)(k + l).$$

Поскольку p – простое, то $k - l = 1$, $k + l = p$. Отсюда следует, что

$$k = \frac{p+1}{2}, \quad l = \frac{p-1}{2}.$$

Легко проверить, что при $k = 5, 8, 11, 13, 14$ число $p = 2k - 1$ – не простое. Следовательно,

$$5^2, 8^2, 11^2, 13^2, 14^2$$

не представляются суммой простого и квадрата натурального.

Задача 4. Какое максимальное количество точек можно расположить на плоскости так, чтобы любые две из них были соединены отрезками, попарно не пересекающими друг друга. (*Внимание!* Концы отрезков могут совпадать.)

Решение. На рисунке 1 видно, как располагаются соответствующие системы точек при $n = 3$ и $n = 4$.

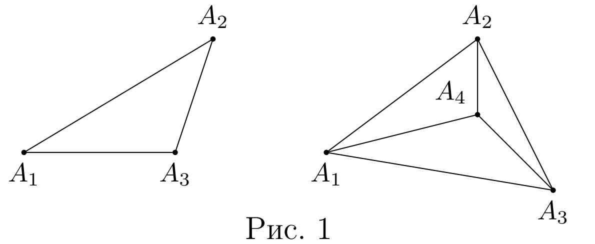

Рис. 1

Пятую точку нельзя добавить при любом расположении A_1, A_2, A_3, A_4. Дело в том, что если она располагается вне треугольников, то ее нельзя соединить с A_4, а если она находится внутри одного из них, то ее нельзя соединить без пересечений сторон с оставшийся четверкой.

10 КЛАСС

Задача 1. Найти все решения системы

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что

$$x+y=1 \;\Rightarrow\; x^2+2xy+y^2=1-2z+z^2.$$

Поэтому

$$2xy=1-2z+z^2-x^2-y^2=1-2z+z^2+z^2-1=2z^2-2z.$$

Следовательно,

$$1-z^3=(1-z)(1+z+z^2),$$

$$1-z^3=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(1-z)((x+y)^2-3xy)=$$
$$=(1-z)((1-z)^2-3z^2+3z)=(1-z)(1+z-2z^2).$$

Для $z=1$ из второго уравнения исходной системы немедленно следует, что $x=y=0$. В случае $z\neq 1$

$$1+z+z^2=1+z-2z^2 \;\Leftrightarrow\; 3z^2=0 \;\Rightarrow\; z=0.$$

При этом

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \;\Rightarrow\; x^2+(1-x)^2=1 \;\Leftrightarrow\; 2x^2-2x=0.$$

Если $x=0$, то $y=1$. Если $x=1$, то $y=0$. Окончательно находим,

$$x=1,\quad y=0,\quad z=0;$$
$$x=0,\quad y=1,\quad z=0;$$
$$x=0,\quad y=1,\quad z=0$$

– все решения системы уравнений.

Задача 2. Доказать, что любой прямоугольный треугольник можно разрезать на четыре треугольника так, чтобы один из них был прямоугольный, а остальные три – равнобедренные.

Решение. Пусть ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C, для которого $\angle ABC$ больше $\angle CAB$ (рис. 2).

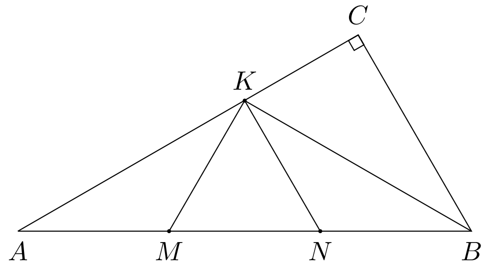

Рис. 2

Отметим на AC точку K так, чтобы $AK = KB$. Выберем на AB точки M и N из условий $AM = MK$ и $BN = NK$. В этом случае треугольник BKC – прямоугольный, а треугольники AMK, KMN, KNB – равнобедренные. Это и требовалось доказать.

Задача 3. Найти десять натуральных чисел, которые нельзя представить в виде суммы простого числа и куба натурального числа.

Решение. Докажем, что среди кубов k^3 можно выбрать десять чисел, не представимых в виде суммы простого и куба натурального.

Если $k^3 = p + l^3$, то $p = k^3 - l^3 = (k-l)(k^2+kl+l^2)$. Поскольку p – простое, то $k - l = 1$, $p = k^2 + kl + l^2$. То есть, $l = k - 1$ и

$$p = k^2 + k(k-1) + (k-1)^2 = 3k^2 - 3k + 1.$$

Последнее число не простое при $k = 5n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, поскольку

$$p = 3(5n-1)^2 - 3(5n-1) + 1 = 3 \cdot 5^2 n^2 - 6 \cdot 5n + 3 - 3 \cdot 5n + 3 + 1 = 5(15n^2 - 9n + 2).$$

То есть, оно делится на 5.

Поэтому десять чисел $4^3, 9^3, 14^3, \dots, 49^3$ удовлетворяют условиям задачи.

Задача 4. Построить две последовательности строго возрастающих натуральных чисел a_n $(n = 1, 2, \dots)$ и b_n $(n = 1, 2, \dots)$, для которых $a_n - b_n = (-1)^n n$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Решение. Положим $a(n) = 2n^2 + (-1)^n n$ и $b(n) = 2n^2$. Для них $a(n) - b(n) = (-1)^n n$. Последовательность $b(n)$ строго возрастает.

Докажем то же самое про $a(n)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} a(n+1) - a(n) &= 2(n+1)^2 + (-1)^{n+1}(n+1) - 2n^2 - (-1)^n n = \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - (-1)^n n - (-1)^n - 2n^2 - (-1)^n n = \\ &= 4n - 2(-1)^n n + 2 - (-1)^n \ge 2n + 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $a(n+1) > a(n)$ для любого натурального n. То есть, $a(n)$ строго возрастает.

11 КЛАСС

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^6 + 2y^6 + 3z^6 = 1, \\ x^4 + 2y^4 + 3z^4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Из уравнений следует, что $|x| \le 1$. Если $|x| = 1$, то $y = z = 0$. Пусть $|x| < 1$. Поскольку $|y| < 1$ и $|z| < 1$, то

$$1 = x^4 + 2y^4 + 3z^4 > x^6 + 2y^6 + 3z^6 = 1.$$

Мы получили противоречие. Следовательно,

$$x = 1, \ \ y = 0, \ \ z = 0;$$
$$x = -1, \ \ y = 0, \ \ z = 0$$

– все решения системы.

Задача 2. Построим из рациональных чисел $r = a/q$ (a – целое, q – натуральное) лабиринт по следующим правилам:

1) любое рациональное число r – комната лабиринта;

2) две комнаты r_1 и r_2 соединены проходом, если $r_1 \cdot r_2 = 1$ или разность $(r_1 - r_2)$ – целое число.

Доказать, что в этом лабиринте для любых двух комнат существует путь, соединяющий их (можно перейти из одной комнаты в любую другую по проходам).

Решение. Сначала докажем, что любую рациональную точку $r = a/q_0 \ne 0$ можно соединить с нулем некоторым путем. Разделив целое a на натуральное q_0 с остатком, получим

$$a = q_0 b + q_1 \quad \text{с} \ \ 0 \le q_1 < q_0.$$

Здесь q_1 – остаток от деления. При этом для $r_1 = q_1/q_0$ разность

$$r - r_1 = \frac{a}{q_0} - \frac{q_1}{q_0} = b$$

– целое число. Если $r_1 = 0$ (a делится на q_0), то r и r_1 соединены проходом. Пусть теперь $r_1 \ne 0$. Тогда $q_1 \ne 0$ и для $r_2 = q_0/q_1$ выполняется равенство $r_1 r_2 = 1$. Следовательно,

$$r = \frac{a}{q_0} \quad \to \quad r_1 = \frac{q_1}{q_0} \quad \to \quad r_2 = \frac{q_0}{q_1}$$

– путь из r в r_2. Напомним, что при этом $0 < q_1 < q_0$. Повторяя это рассуждение с r_2 вместо r и так далее, мы в конце концов попадем в ноль, поскольку знаменатели получившихся дробей на каждом шаге уменьшаются. Для произвольных ненулевых рациональных r и r' (по доказанному) найдутся пути

$$r \to r_1 \to \dots \to r_s \to 0,$$
$$r' \to r'_1 \to \dots \to r'_t \to 0.$$

Обращая стрелки во втором, получим путь

$$r \to r_1 \to \dots \to r_s \to 0 \to r'_t \to \dots \to r'_1 \to r'$$

из r в r'. Утверждение полностью доказано.

Задача 3. Пусть в треугольнике ABC стороны $AB = 15$, $BC = 7$, $AC = 20$. Доказать, что

$$\angle A + 2\angle C = 90^\circ.$$

Решение. Поскольку $7^2 + 15^2 < 20^2$, то угол B – тупой (рис. 3).

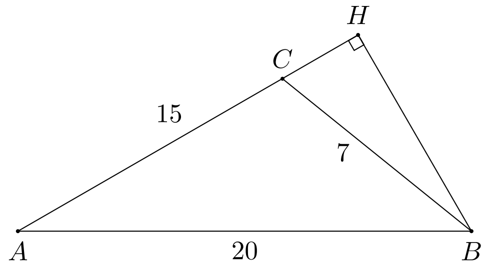

Рис. 3

На продолжении AB отметим точку H – основание высоты из вершины C. Применяя два раза теорему Пифагора, получим равенства

$$(15+BH)^2+HC^2=20^2, \quad BH^2+HC^2=7^2.$$

Вычитая из первого второе, находим

$$15^2+30BH=20^2-7^2 \quad \Rightarrow \quad BH=\frac{21}{5}.$$

Поэтому

$$HC^2=7^2-BH^2=\left(\frac{28}{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad HC=\frac{28}{5}.$$

Из этих вычислений следует, что

$$\frac{AC}{CH}=\frac{AB}{BC}.$$

То есть, BC – биссектриса угла ACH в прямоугольном треугольнике AHC. Следовательно,

$$\angle BAC+2\angle ACB=90^\circ.$$

А это и требовалось доказать.

Задача 4. Многочлен ax^3+bx^2+cx при целых значениях x принимает только целые значения. Доказать, что $6\cdot a$ – целое число.

Решение. Пусть $f(x)=ax^3+bx^2+cx$. Заметим, что

$$g(x)=f(x+1)-f(x)=a(3x^2+3x+1)+b(2x+1)+c,$$
$$h(x)=g(x+1)-g(x)=6ax+(3a+2b),$$
$$r(x)=h(x+1)-h(x)=6a.$$

Поскольку при целых x функция $f(x)$ принимает только целые значения, то этим же свойством обладают $g(x)$, $h(x)$, $r(x)$. Значит, $6a=r(x)$ – целое число.