Городская олимпиада по математике
г. Хабаровск, 2003 год

9 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что

$$[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$$

для любого вещественного x. (Напомним, что $[x]$ – это целая часть вещественного числа.)

Решение. Положим, что $x=a+\alpha$, где a – целая, а α – дробная часть этого числа. Рассмотрим три случая.
1. $\alpha\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$. Тогда левая часть выражения равна:

$$S(x)=a+a+a=3a=[3a+3\alpha]=[3x]\,.$$

2. $\alpha\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Тогда левая часть выражения равна:

$$S(x)=a+a+(a+1)=3a+1=[3a+3\alpha]=[3x]\,.$$

3. $\alpha\in\left[\frac{2}{3},1\right)$. Тогда левая часть выражения равна:

$$S(x)=a+(a+1)+(a+1)=3a+2=[3a+3\alpha]=[3x]\,.$$

Нужное тождество доказано.

Задача 2. Доказать, что для любых натуральных n и m выполнено

$$\left|m\sqrt{2}-n\right|>\frac{1}{2(m+n)}.$$

Решение. Заметим, что

$$\alpha=\left|m\sqrt{2}-n\right|=\frac{\left|\left(m\sqrt{2}-n\right)\left(m\sqrt{2}+n\right)\right|}{\left(m\sqrt{2}+n\right)}=\frac{|2m^2-n^2|}{\left(m\sqrt{2}+n\right)}.$$

Так как $\sqrt{2}$ – иррационально, то $|2m^2-n^2|\geq 1$. Поэтому

$$\alpha\geq\frac{1}{\left(m\sqrt{2}+n\right)}>\frac{1}{2(m+n)},$$

что и требовалось доказать.

Задача 3. Пусть сумма n действительных чисел $x_1,\ldots,x_n$ $(n\geq 2)$ неотрицательна. Доказать, что среди этих чисел можно выбрать такое, что сумма оставшихся будет неотрицательна.

Решение. Доказательство легко получить методом «от противного».

Задача 4. Пусть ABC – остроугольный треугольник и D – середина BC. Выберем на отрезке AD произвольную точку E и обозначим через M ее проекцию на BC. В свою очередь, точки P и N есть проекции M на AC и AB. Доказать, что угол MPE равен углу MNE.

Решение. Пусть B' и C' – точки пересечения со сторонами AC и AB прямой, проходящей через E и параллельной BC. Так как $B'E = EC'$, а отрезок EM перпендикулярен $B'C'$ и BC, то треугольник $B'C'M$ – равнобедренный. Кроме того, четырехугольники $MPB'E$ и $MEC'N$ вписаны в окружности (у них по паре прямых противоположных углов). Поэтому имеет место цепочка равенств для углов:

$$\angle MPE = \angle NB'E = \angle MC'E = \angle MNE.$$

Что и требовалось доказать.

10 КЛАСС

Задача 1. В прямоугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны BC, N – середина стороны CD. P – точка пересечения отрезков DM и BN. Докажите, что угол MAN равен углу BPM.

Решение. Пусть точка N' – середина стороны AB. Отрезок DN' параллелен отрезку BN. Поэтому последовательно равны углы

$$\angle MAN = \angle N'DM = \angle BPM.$$

А это и требовалось доказать.

Задача 2. На плоскости имеются правильные многоугольники с числом сторон 34 и 55. Построить с помощью циркуля и линейки правильный $34 \cdot 55 = 1870$ -угольник.

Решение. Выбрав на каждом из многоугольников по две соседние стороны и восставив через середины перпендикуляры, найдем их центры. Соединив последние с концами каждой из сторон, получим углы

$$\alpha = \frac{360^\circ}{34} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{360^\circ}{55}.$$

Заметим, что

$$13\alpha - 21\beta = \frac{360^\circ}{34 \cdot 55}.$$

Поэтому, отложив угол α 13 раз и угол β 21 раз, с последующим вычитанием, получим нужный угол, определяющий правильный 1870-угольник.

Задача 3. Пусть x и y – положительные числа, для которых выполнено $x + y = 1$. Доказать, что

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) \geq 9.$$

Решение. Неравенство легко преобразуется к виду $x^2 + y^2 + 8x^2y^2 \leq 1$. Поскольку

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

то $x^2 + y^2 + 8x^2y^2 = (x+y)^2 + 8x^2y^2 - 2xy = 1 + 2xy(4xy - 1) \leq 1$. А это и требовалось доказать.

Задача 4. Обозначим через $N(m)$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$ количество всех пар простых чисел (p_1, p_2), сумма которых равна m. Иными словами:

$$N(m) = \sum_{p_1+p_2=m} 1, \quad (p_1, p_2) \text{ – простые числа.}$$

Например $N(1) = N(2) = N(3) = 0$; $N(4) = 1$, поскольку $4 = 2 + 2$; $N(5) = 2$, поскольку $5 = 2 + 3 = 3 + 2$. Доказать, что для любого натурального $m \geq 4$ выполняется равенство

$$(m - 3p_1)N(m - p_1) + \dots + (m - 3p_n)N(m - p_n) = \sum_{p<m} (m - 3p)N(m - p) = 0,$$

где суммирование проводится по всем простым числам $p = p_i < m$.

Решение. Заметим, что интересующая нас сумма равна

$$\sum_{p<m} (m - 3p) \sum_{p_1+p_2=m-p} 1 = \sum_{p+p_1+p_2=m} (p_1 + p_2 + p_3 - 3p) = \sum_{\dots} p + \sum_{\dots} p_1 + \sum_{\dots} p_2 - 3 \sum_{\dots} p,$$

где в каждой из четырех сумм суммирование производится по всем возможным разбиениям $m = p + p_1 + p_2$ на три простых. Поскольку p, p_1, p_2 входят в разбиение симметрично, то все эти суммы равны между собой. Следовательно, исходная сумма равна нулю и тождество доказано.

11 КЛАСС

Задача 1. Пусть O – внутренняя точка квадрата $ABCD$ со стороной $AB = 1$, для которой выполняется равенство

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2.$$

Доказать, что O – центр квадрата.

Решение. Пусть x и y – расстояния от точки O до сторон AD и AB соответственно. С помощью теоремы Пифагора выразим через эти числа искомое выражение и преобразуем его к виду:

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2.$$

Как видно из этого выражения, оно рано 2 только если оба квадрата равны нулю, то есть, если $x = y = \frac{1}{2}$. А это и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что $\cos\left(\dfrac{\pi}{64}\right)$ – иррациональное число.

Решение. Предположим, что это неверно, и

$$\cos\left(\frac{\pi}{64}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4 \cdot 2^4}\right) \text{ – рациональное число.}$$

Поскольку $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, то рациональными будут также числа:

$$\cos\left(\frac{\pi}{32}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{16}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Но последнее число – иррационально. Таким образом, получено противоречие, доказывающее утверждение в задаче.

Задача 3. Величины α и β острых углов удовлетворяют равенству

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta).$$

Доказать, что $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Из условия следует, что

$$\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=\sin\beta(\cos\alpha-\sin\alpha).$$

Если $\sin\alpha>\cos\beta$ и $\cos\alpha>\cos\beta$, то $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha>\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ – противоречие. Точно также получается противоречие, если обратить знаки в двух предыдущих неравенствах. Значит, $\sin\alpha=\cos\beta$ и $\cos\alpha=\cos\beta$. Следовательно $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Что и требовалось доказать.

Задача 4. Бесконечная последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ такова, что для любого целого $n\geq 0$ выполнено

$$(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n)=2^{3^n}.$$

Доказать, что a_m делится на 3^m при всех натуральных m.

Решение. Заметим, что $a_m=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+a_m)-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{m-1})=$ $=2^{3^m}-2^{3^{m-1}}=2^{3^{m-1}}(4^{3^{m-1}}-1)$.

Математической индукцией по m можно легко показать, что второй множитель в правой части полученного выражения делится на 3^m. Что и требовалось доказать.