Городская олимпиада по математике
г. Хабаровск, 2004 год

9 КЛАСС

Задача 1. Каждая точка плоскости окрашена в один из двух цветов. Доказать, что на любом заданном расстоянии найдутся две точки одного цвета.

Решение. Рассмотрим три вершины правильного треугольника на плоскости, сторона которого – заданное число. По крайней мере две из них имеют один цвет и находятся на нужном расстоянии.

Задача 2. На доске написано несколько положительных чисел, каждое из которых равно полусумме всех остальных. Сколько чисел на доске?

Решение. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – написанные числа и S – их сумма. По условию, для любого номера k

$$\frac{1}{2}S - \frac{1}{2}x_k = x_k \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}S = \frac{3}{2}x_k.$$

Сложив все эти n равенств, получим соотношение

$$\frac{n}{2}S = \frac{3}{2}S.$$

Следовательно, $n = 3$. Это возможно, если $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Задача 3. На плоскости даны 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что из них можно выбрать три точки так, чтобы внутри образованного ими треугольника не находились другие точки.

Решение. Выберем любые три точки A, B, C. Если внутри треугольника ABC имеется точка D, то перейдем от ABC к меньшему треугольнику ABD. Повторяя при необходимости эту процедуру, мы получим нужную тройку точек не более, чем за $99 - 3 = 96$ шагов.

Задача 4. В классе у любых двух учеников, имеющих одинаковое количество друзей (среди учеников класса), нет общих друзей. Доказать, что хотя бы у одного ученика ровно один друг.

Решение. Пусть ученик A имеет максимальное количество друзей: A_1, A_2, …, A_k. По условию, каждый из них имеет разное число друзей, поскольку A – общий друг для A_1, A_2, …, A_k. Ввиду выбора A, у каждого из A_n $(n = 1, \ldots, k)$ не более k друзей. Поэтому количества друзей для A_1, A_2, …, A_k равны в точности 1, 2, …, k, взятым в некотором порядке. В частности, один из них имеет ровно одного друга.

10 КЛАСС

Задача 1. Пусть $f(x, y)$ – функция от двух переменных x и y, которые могут принимать любые действительные значения. Предположим, что при любом фиксированном x или y функция $f(x, y)$ линейна по другой переменной. Доказать, что найдутся действительные a, b, c, d, для которых

$$f(x, y) = a + bx + cy + dxy$$

(линейная при фиксированном x или y).

Решение. По условию,

$$f(x,y) = g(x) + h(x)y,$$

где $g(x)$ и $h(x)$ – неоторые функции от x. При этом для некоторых действительных a, a', b, b'

$$g(x) = f(x,0) = a + bx,$$
$$g(x) + h(x) = f(x,1) = a' + b'x.$$

Поэтому

$$f(x,y) = a + bx + (a' + b'x - a - bx)y = a + bx + cy + dxy$$

с $c = a' - a$ и $d = b' - b$.

Задача 2. Раскрасить все точки плоскости в три цвета так, чтобы каждая прямая оказалась окрашенной в два цвета (*все три цвета присутствуют!*).

Решение. Начало координат O красим в белый цвет. Координатные оси (без точки O) в красный, а оставшиеся точки плоскости в синий.

Задача 3. Пусть $x^5 - x^3 + x = 2$. Доказать, что $x^6 > 3$.

Решение.

$$x^6 - 3 = x^6 + 1 - 4 = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1) - 4 =$$
$$2 \cdot \frac{x^2+1}{x} - 4 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4.$$

Так как $x \neq 1$, то

$$x + \frac{1}{x} > 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2.$$

Следовательно,

$$x^6 - 3 > 2 \cdot 2 - 4 = 0.$$

Задача 4. На плоскости нарисовано пять различных окружностей. Известно, что любые четыре из них имеют общую точку. Доказать, что все пять проходят через общую точку.

Решение. Обозначим окружности цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Пусть A – общая точка окружностей 1, 2, 3, 4; B – общая точка окружностей 1, 2, 3, 5; C – общая точка окружностей 1, 2, 4, 5. Каждая из трех точек A, B, C принадлежит окружностям 1 и 2. Так как две окружности пересекаются не более чем по двум точкам, то некоторые две из точек A, B, C совпадают. Но тогда через эту пару совпадающих точек проходят все пять окружностей.

11 КЛАСС

Задача 1. Построить бесконечную последовательность различных пар положительных рациональных чисел (x, y), для которых

$$x^y = y^x \quad \text{и} \quad x \neq y.$$

Решение. Пусть $y = tx$. Тогда
$$x^{tx} = (tx)^x.$$
Поэтому для $t \neq 1$
$$x^t = tx \Rightarrow x^{t-1} = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{t-1}}.$$
Выбирая в качестве t числа вида
$$\frac{n+1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$
получим нужную бесконечную последовательность
$$(x_n, y_n) = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \right).$$

Задача 2. Точки M и N лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $AM = CN$ и $AN = BM$. Доказать, что площадь четырехугольника $BMNC$ по крайней мере в три раза больше площади треугольника AMN.

Решение. Пусть $AM = x$ и $AN = y$. Тогда
$$S_{ABC} = \frac{AB}{x} \cdot \frac{AC}{y} \cdot S_{AMN} = \frac{(x+y)^2}{y} \cdot S_{AMN},$$
$$S_{BMNC} = S_{ABC} - S_{AMN} = \left(\frac{(x+y)^2}{xy} - 1 \right) \cdot S_{AMN}.$$
Осталось только заметить, что
$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{xy} \geq 4 \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{xy} - 1 \geq 3.$$

Задача 3. Решить уравнение
$$x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0.$$

Решение. Его можно переписать в виде
$$(x+1)^3 = -2x^3.$$
Отсюда немедленно получаем, что
$$x + 1 = -\sqrt[3]{2}x \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}.$$

Задача 4. Доказать, что для любого натурального $n > 1$
$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}.$$

Решение. Проведем индукцию по n.

При $n = 2$ неравенство верно.

пусть оно верно при $n = k$. Тогда для $n = k + 1$

$$\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} =$$
$$= 2\frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{2k+1}{k+1} > 2\frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{2k+1}{k+1} =$$
$$= \frac{4^{k+1}}{k+2} \cdot \frac{(k+2)(2k+1)}{2(k+1)^2}.$$

Так как

$$(k+2)(2k+1) - 2(k+1)^2 = k \geq 1,$$

то

$$\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} > \frac{4^{k+1}}{k+2}.$$

Индуктивный переход обоснован и неравенство полностью доказано.