Городская олимпиада по математике
г. Хабаровск, 2006 год

9 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что n и $n+2$ не делятся на числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

Решение. Пусть $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$. Тогда для любого натурального k числа $n = Nk - 1$ и $n + 2 = Nk + 1$ не делятся на $2, 3, \ldots, 17$.

Задача 2. Прямоугольный лист бумаги со сторонами a и b ($a > b$) складывают по прямой линии так, что две его противоположные вершины попадают в одну точку. Найти величину a/b, если известно, что складка делит сторону a в отношении $2:1$.

Решение. Пусть $ABCD$ – рассматриваемый прямоугольник с противоположными вершинами A и C, которые накладываются друг на друга. Линия складки перпендикулярна диагонали AC и проходит через еӌ середину O. Пусть также складка пересекает сторону AB в точке K и при этом $AK = 2KB = 2x$. Из подобия треугольников AOK и ABC находим, что для $y = AO$ выполняется пропорция

$$\frac{2x}{y} = \frac{2y}{3x}$$

Отсюда получаем соотношение $y = \sqrt{3}x$. По теореме Пифагора

$$b = \sqrt{(2y)^2 - (3x)^2} = \sqrt{12x^2 - 9x^2} = \sqrt{3}x.$$

Окончательно находим

$$\frac{a}{b} = \frac{3x}{x\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Задача 3. Найти все пары вещественных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$x^4 + x^2 - 2xy^2 - 2x^2y^2 + 2y^4 = 0.$$

Решение. Левая часть уравнения записывается в виде

$$(x - y^2)^2 + (x^2 - y^2)^2.$$

Эта величина равна нулю только для $|x| = |y|$ и $x = y^2 \geq 0$. Поэтому $y^2 = |y| = x$. Отсюда получаем три пары корней:

$$(x, y) = (0, 0),\ (1, 1),\ (1, -1).$$

Задача 4. Можно ли так расположить шесть точек на плоскости, чтобы любые три из них были вершинами равнобедренного треугольника?

Решение. Можно. Для этого выбираем вершины правильного пятиугольника и его центр.

10 КЛАСС

Задача 1. При каких натуральных числах a и b число

$$\frac{(2a+1)(2b+1)}{(a+1)(b+1)}$$

будет целым?

Решение. Заметим, что

$$2 < \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \leq \frac{2a+1}{a+1} \cdot \frac{2b+1}{b+1} < 2 \cdot 2 = 4.$$

Значит, если интересующая нас величина принимает целое значение, то это может быть только тройка. В таком случае

$$(2a+1)(2b+1) = 3(a+1)(b+1) \quad \leftrightarrow \quad ab - a - b = 2 \quad \leftrightarrow \quad (a-1)(b-1) = 3.$$

Это возможно только при $a = 2$, $b = 4$ или $a = 4$, $b = 2$.

Задача 2. В ромбе $ABCD$ угол A равен $60°$. На сторонах AD и DC выбраны точки N и M соответственно так, что угол BNM равен $60°$. Доказать, что треугольник BNM правильный.

Решение. По условию углы BNM и BDM равны $60°$. Поэтому четырехугольник $BMDN$ вписан в некоторую окружность. Но в таком случае угол NBM равен $180° - 120° = 60°$. То есть, все углы интересующего нас треугольника равны $60°$ и он правильный.

Задача 3. Несколько дуг окружности окрашены в красный цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Доказать, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

Решение. Покрасим в синий цвет дуги, симметричные красным дугам. Так как сумма длин красных дуг равна сумме длин синих дуг, то сумма длин всех дуг (синих и красных) меньше длины окружности. Значит, найдется неокрашенная точка. Диаметр, проходящий через нее, и будет искомым.

Задача 4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2ab}{b-a} = 1, \\ \dfrac{3bc}{b+c} = 1, \\ \dfrac{4ac}{c-a} = 1. \end{cases}$$

Решение. Систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{2b} = 1, \\ \dfrac{1}{3c} + \dfrac{1}{3b} = 1, \\ \dfrac{1}{4a} - \dfrac{1}{4c} = 1. \end{cases}$$

Положив $\dfrac{1}{a} = x$, $\dfrac{1}{b} = y$, $\dfrac{1}{c} = z$, получим легко решаемую систему

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ y + z = 3, \\ x - z = 4 \end{cases}$$

с $x = \dfrac{9}{2}$, $y = \dfrac{5}{2}$, $z = \dfrac{1}{2}$.

То есть,

$$a = \frac{2}{9}, \quad b = \frac{2}{5}, \quad c = 2.$$

11 КЛАСС

Задача 1. Найти все целые a и b, для которых число $9a^4 - b^4$ положительное и простое.

Решение. Из разложения

$$p = 9a^4 - b^4 = (3a^2 - b^2)(3a^2 + b^2)$$

следует, что $3a^2 - b^2 = 1$. То есть, $b^2 + 1 = 3a^2$. Но числа вида $b^2 + 1$ с целым b никогда не делятся на 3. Значит, таких целых a и b не существует.

Задача 2. Доказать, что

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}.$$

Решение. Умножив обе части на $\sin\frac{\pi}{5}$, получим равносильное нужному верное равенство

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{4\pi}{5}\right)\right) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{5}.$$

Задача 3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки K и L так, что $\angle BAK = \angle KAL$. Доказать, что $AL = BK + DL$.

Решение. Отложим на продолжении отрезка BC за точку B такую точку L', что $BL' = DL$. Тогда $\Delta ABL' = \Delta ADL$ (по двум катетам), $AL' = AL$, $L'K = BK + DL$ и задача сводится к доказательству равенства $AL' = L'K$. Но треугольник $AL'K$ – равнобедренный ($\angle L'AK = \angle DAK$) и, значит $AL' = L'K$.

Задача 4. Докажите, что при $x \geq 0$ и $\alpha \geq 1$

$$1 + x^\alpha \leq (1 + x)^\alpha.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = (1 + x)^\alpha - x^\alpha - 1$. Для нее $f(0) = 0$, $f'(x) = \alpha\left((1 + x)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}\right) \geq 0$ при $x \geq 0$. Значит, $f(x) \geq 0$ для всех $x \geq 0$.

Задача 5. На сторонах AB и CD правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 во внешнюю сторону построены квадраты $ABKL$ и $CDMN$. Найти расстояние между точками K и M.

Решение. Пусть O – центр данного шестиугольника. Тогда точка M получается из точки K поворотом вокруг точки O на $120°$. По теореме Пифагора

$$OK = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Далее, по теореме косинусов в треугольнике KOL находим.