

8 КЛАСС

**Задача 1.** Какое максимальное количество воскресений может быть:

- а) в одном месяце?
- б) в одном году?

**Решение.** Любые семь дней подряд содержат ровно одно воскресенье. Месяц содержит меньше 35 дней, а, значит, не более 5 воскресений. Год содержит меньше  $371 = 7 \cdot 53$  дней, а, следовательно, не более 53 воскресений. Оценки точные, т.к. существуют месяцы и годы, которые начинаются с воскресений.

**Задача 2.** Имеется несколько кувшинов, среди которых есть два кувшина разной формы, а также два кувшина разного цвета. Докажите, что среди них найдутся два кувшина одновременно и разной формы и разного цвета.

**Решение.** Рассмотрим множество  $\Phi$  кувшинов с формами  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  и множество  $C$  кувшинов цветов  $C_1$  и  $C_2$ . Если в их пересечении содержатся два кувшина разной формы и цвета, то задача решена. Если в этом множестве нет кувшина формы  $\Phi_1$ , но есть кувшины формы  $\Phi_2$  (например, цвета  $C_2$ ), то достаточно дополнить его до пары любым кувшином формы  $\Phi_1$ . Аналогично рассматривается случай, когда в множестве  $\Phi \cap C$  нет кувшина одного цвета. Если же множество  $\Phi \cap C$  пустое, то любой кувшин формы  $\Phi_1$  и любой кувшин цвета  $C_1$  образуют искомую пару.

**Задача 3.** На дискотеке выяснилось, что каждый юноша знаком с 3 девушками, а каждая девушка с тремя юношами. Докажите, что на дискотеке одинаковое количество юношей и девушек.

**Решение.** Пусть на дискотеке  $x$  юношей и  $y$  девушек. Найдем число  $n$  знакомых пар юноша – девушка. Каждый юноша присутствует в 3 таких парах, поэтому  $n = 3x$ . Аналогично  $n = 3y$ . Значит,  $x = y$ .

**Задача 4.** Девять чисел  $a, b, c, d, e, f, g, h, k$  отличны от нуля. Докажите, что среди чисел

$$aek, dhc, bfg, -gес, -ahf, -bdk$$

есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное.

**Решение.** Произведение всех 6 чисел равно

$$-(abcdefghk)^2 < 0.$$

Поэтому в произведении должны быть и положительный и отрицательный сомножители.

**Задача 5.** Могут ли три человека, имея один двухместный мотоцикл, преодолеть расстояние 60 км за три часа? Скорость пешехода равна 5 км/час, скорость мотоцикла (с грузом или без груза) – 50 км/час.

**Решение.** Ответ “да”. Первый час двое на мотоцикле проезжают 50 км. Один из них за оставшиеся 2 часа проходит 10 км пешком, другой на мотоцикле возвращается на 10-й

км пути, дожидается там третьего человека. За оставшийся час они вместе доезжают до 60-го км пути.

## 9 КЛАСС

**Задача 1.** Сторона квадрата  $ABCD$  равна  $a$ . На диагонали  $AC$  взята точка  $P$  так, что  $|PC| = |AC|/4$ . Пусть  $E$  — точка пересечения  $BP$  и  $CD$ . Найти  $|CE|$ .

**Решение.** Проведем через точку  $P$  прямую, параллельную  $DC$ , которая пересекает  $BC$  в точке  $K$ . Легко находим, что

$$|PK| = \frac{1}{4}a \quad \text{и} \quad |BK| = \frac{3}{4}a.$$

Из подобия треугольников  $BKP$  и  $BCE$  находим, что  $|EC| = a/3$ .

**Задача 2.** Доказать, что для любого натурального  $n$ , число  $n^5 - n$  делится на 5.

**Решение.** Достаточно проверить утверждение для  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  (остатков от деления на 5).

**Задача 3.** Если в двузначном числе сложить его цифры, то получится число, которое в 5 раз меньше искомого. Найти это двузначное число.

**Решение.** По условию

$$\overline{ab} = 10a + b = 5(a + b).$$

То есть,  $5a - 4b = 0$ . Значит,  $a = 4$  и  $b = 5$ .

**Задача 4.** Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

**Решение.** Утверждение немедленно следует из равенства касательных к вписанной окружности, проведенных из вершин к точкам касания сторон. При этом следует учесть, что гипотенуза — диаметр.

**Задача 5.** Пусть  $x, y, z$  — вещественные числа, для которых

$$x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} < 1.$$

Доказать, что

$$x^{4000} + y^{4000} + z^{4000} < 1.$$

**Решение.** Каждое из чисел по абсолютной величине меньше, чем 1. Поэтому

$$x^{4000} + y^{4000} + z^{4000} \leq x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} < 1.$$

## 10 КЛАСС

**Задача 1.** Алеша и Боря выкапывают яму за два дня, Алеша и Вова за три дня, а Боря и Вова — за 6. За сколько дней они выкопают яму, если станут копать втроем.

**Решение.** Алеша и Вова за день выроют  $1/3$  ямы, а Боря и Вова за день выроют  $1/6$  ямы. Поэтому Алеша, Боря и 2 Вовы за день выроют  $1/2$  ямы. Но, по условию, Алеша и Боря тоже за день выроют половину ямы. Значит, Вова вообще не копает и они вместе закончат работу опять за 2 дня.

**Задача 2.** Найти все пары натуральных чисел  $(a, b)$ , для которых

$$\frac{ab - 1}{(a - 1)(b - 1)} - \text{целое число.}$$

**Решение.** Заметим, что

$$\frac{ab - 1}{(a - 1)(b - 1)} = \frac{(a - 1)(b - 1) + a - 1 + b - 1}{(a - 1)(b - 1)} = 1 + \frac{1}{b - 1} + \frac{1}{a - 1}.$$

Поэтому число целое только для пар  $(2, 2)$  и  $(3, 3)$ .

**Задача 3.** Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k + 1)} < 1.$$

**Решение.** Так как

$$\frac{1}{k(k + 1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1},$$

то

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n + 1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1} = 1 - \frac{1}{k + 1} < 1.$$

**Задача 4.** Доказать, что для любых положительных чисел  $a_1, a_2, b_1, b_2$ ,

$$\sqrt{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} \geq \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2}.$$

**Решение.** Возведем обе части в квадрат и воспользуемся неравенством (среднее арифметическое и среднее геометрическое!)

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 \geq 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2}.$$

**Задача 5.** В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ , биссектрисы  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что  $OD = OE$ .

**Решение.** Легко проверить, что

$$\angle EBD + \angle EOD = 180^\circ$$

Поэтому четырехугольник  $BEOD$  вписанный. На хорды  $EO$  и  $OD$  опираются на равные углы  $EBO$  и  $OBD$ . Значит  $EO = OD$ .

## 11 КЛАСС

**Задача 1.** Найти коэффициенты  $a$  и  $b$  так, чтобы многочлен  $ax^4 + bx^3 + 1$  делился на  $(x - 1)^2$ .

**Решение.** При  $x = 1$  многочлен должен принимать значение 0. Поэтому  $a + b + 1 = 0$  и  $ax^4 - (a + 1)x^3 + 1 = ax^3(x - 1) - x^3 + 1 = (x - 1)(ax^3 - x^2 - x - 1)$ . Второй сомножитель при  $x = 1$  также должен быть равен нулю. То есть,  $a = 3$  и  $b = -4$ .

**Задача 2.** Доказать, что среди  $n + 1$  различных натуральных чисел, меньших  $2n$ , есть три числа, одно из которых равно сумме двух других.

**Решение.** Пусть

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$$

– интересующие нас натуральные числа. Если утверждение неверно, то мы получим еще  $n$  других натуральных чисел

$$a_{n+1} - a_n < a_{n+1} - a_{n-1} < \dots < a_{n+1} - a_2 < a_{n+1} - a_1$$

от 1 до  $2n$ . Поскольку

$$(n + 1) + n = 2n + 1 > 2n,$$

то мы пришли к противоречию.

**Задача 3.** Доказать, что для любого натурального  $n$  функция  $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  – многочлен.

**Решение.** Проводим индукцию по  $n$  с помощью тождества

$$\cos n\alpha + \cos(n - 2)\alpha = 2 \cos(n - 1)\alpha \cdot \cos \alpha.$$

**Задача 4.** Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Доказать, что этот треугольник правильный.

**Решение.** Пусть  $A$  и  $B$ ,  $C$  и  $D$ ,  $E$  и  $F$  – точки пересечения окружности со сторонами  $PQ$ ,  $QR$ ,  $RP$  треугольника  $PQR$ . Рассмотрим медиану  $PS$ . Она соединяет середины параллельных хорд  $FA$  и  $DC$  и поэтому перпендикулярна им. Следовательно,  $PS$  является высотой треугольника  $PQR$ , а значит  $PQ = PR$ . Аналогично  $PQ = QR$ .

**Задача 5.** Периметр квадрата увеличили на 60%, а затем уменьшили на 60%. Как и во сколько раз изменилась площадь квадрата?

**Решение.** После увеличения сторона  $a$  квадрата стала  $a + 0,6 \cdot a = 1,6a$ . После уменьшения она стала равна

$$1,6a - 0,6 \cdot 1,6a = \frac{16}{10} \cdot \frac{4}{10}a = \frac{16}{25}a.$$

Следовательно, площадь квадрата уменьшилась с коэффициентом  $\left(\frac{16}{25}\right)^2$ .