Дальневосточная межвузовская олимпиада по математике
Хабаровск — 2004

Задача 1. Доказать, что $\forall\, x, y \in (0, \infty)$

$$x + 2y \geqslant 3\sqrt[3]{xy^2}.$$

Решение. Разделим обе части неравенства на y и положим $t = x/y$. Неравенство перепишется в виде

$$t + 2 - 3\sqrt[3]{t} \geqslant 0$$

и после замены $t = s^3$ приобретает вид

$$s^3 - 3s + 2 \geqslant 0.$$

Осталось только заметить, что

$$s^3 - 3s + 2 = (s-1)^2(s+2) \geqslant 0.$$

Задача 2. Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, такая что:

а) при любом фиксированном y $f(x, y)$ принимает значения некоторого квадратного трехчлена от x (последние, вообще говоря, могут быть разными при разных y);

б) при любом фиксированном x $f(x, y)$ принимает значения некоторого квадратного трехчлена от y.

Доказать, что при некоторых $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

$$f(x, y) = ax + by + cx^2 + dxy + ey^2.$$

Решение. Согласно условию,

$$f(x, y) = g(x) + h(x)y + r(x)y^2,$$

где $g(x)$, $h(x)$, $r(x)$ — некоторые функции от x. Фиксируя $y = -1, 0, 1$, получим

$$g(x) - h(x) + r(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$
$$g(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$$
$$g(x) + h(x) + r(x) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 x^2$$

Поэтому $g(x)$, $h(x)$, $r(x)$ — полиномы второй степени и $f(x, y)$ имеет нужный вид.

Задача 3. Пусть A и B — трехмерные вектора, для которых $|A| = |B| = 1$ (длины векторов равны 1). Предположим, что для некоторых целых m и n, одновременно не равных нулю, выполняется неравенство $|mA + nB| < 1$. Доказать, что

$$\min\{|A + B|,\ |A - B|\} < 1.$$

Решение. Пусть $|mA + nB| < 1$ с $\max\{|m|, |n|\} = d$. Если $d = 1$, то из условия $|A| = |B| = 1$ следует, что $m = \pm 1$ и $n = \pm 1$. Поэтому наше утверждение справедливо. Предположим теперь, что $d \geqslant 2$ и для определенности $|m| = d$. Тогда

$$\left| A + \frac{n}{m} B \right| < \frac{1}{|m|} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Пусть $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ и $\left| \dfrac{n}{m} - \varepsilon \right| \leqslant \dfrac{1}{2}$. В этом случае

$$|A + \varepsilon B| = \left| A + \frac{n}{m} B + \left(\varepsilon - \frac{n}{m} \right) B \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| A + \frac{n}{m} B \right| + \left| \left(\varepsilon - \frac{n}{m} \right) B \right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Поскольку $|A| = 1$, то $\varepsilon \neq 0$ и при этом

$$\min\{|A + B|,\, |A - B|\} \leqslant |A + \varepsilon B| < 1.$$

Задача 4. Доказать, что $\forall x \in (0, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{4} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

Решение. Производная правой части равна

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2} =$$
$$= \frac{1}{1-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}.$$

Интегрируя обе части равенства от 0 до x, получим нужное тождество.