Дальневосточная межвузовская олимпиада по математике
Хабаровск — 18 ноября 2006 г.

Задача 1. Пусть $f : [0, N] \to \mathbb{R}$ — монотонно возрастающая непрерывная функция на отрезке $[0, N]$ с натуральным N. Доказать, что

$$f(0) + f(1) + \cdots + f(N-1) < \int\limits_0^N f(x)dx.$$

Решение. Для любого целого n от 0 до $N - 1$

$$f(n) = \int\limits_n^{n+1} f(n)dx < \int\limits_n^{n+1} f(x)dx.$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n) < \sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_n^{n+1} f(x)dx = \int\limits_0^N f(x)dx.$$

Задача 2. На окружности расположены n вещественных чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних ($n \geqslant 3$). Доказать, что все числа равны друг другу.

Решение. Рассмотрим наибольшее из чисел. Оно равно полусумме не превосходящих его соседей. Это может быть только в случае равенства всех трех. Последовательно повторяя это рассуждение для соседей, получим нужное утверждение.

Задача 3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой при любых x и y

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Доказать, что $f(x) = \alpha x$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение. Пусть $f(1) = \alpha$.

Из аддитивности f следует, что для любого натурального n

$$nf\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = f(1) = \alpha.$$

Поэтому $f\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{n}$. Снова пользуясь аддитивностью, находим, что для всех натуральных m и n

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha \cdot \frac{m}{n}.$$

Кроме того:

$$2f(0) = f(0 + 0) = f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0;$$

$$0 = f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(-\frac{m}{n}\right) \;\Rightarrow\; f\left(-\frac{m}{n}\right) = \alpha\left(-\frac{m}{n}\right).$$

Таким образом, $f(r) = \alpha r$ при всех рациональных r. Для любого вещественного x найдется последовательность рациональных r_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), для которой $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Принимая во внимание непрерывность f, получим

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha r_n = \alpha \lim_{n\to\infty} r_n = \alpha x.$$

Задача 4. Для $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ построить многочлен $P(x, y)$ от двух переменных x и y со следующим свойством: при $k = 1, 2, \ldots, n$ многочлен $P(x, k)$ от переменной x имеет в точности k корней.

Решение. Положим

$$P(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{k} (x-j) \right) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (y-i) \right) =$$
$$= (x-1)(y-2)(y-3)\ldots(y-n)+$$
$$+(x-1)(x-2)(y-1)(y-3)(y-4)\ldots(y-n)+$$
$$+\cdots+(x-1)\ldots(x-n)(y-1)(y-2)\ldots(y-(n-1)).$$

При этом

$$P(x,k) = (-1)^{n-k}(k-1)!(n-k)!(x-1)(x-2)\ldots(x-k)$$

имеет в точности k корней $x = 1, 2, \ldots, k$.

Задача 5. Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, у которых ее восьмая и тринадцатая производные совпадают с ней самой (т.е. с f).

Решение. Из условия $f^{(13)} = f$ следует цепочка равенства

$$f^{(65)} = f^{(52)} = f^{(39)} = \cdots = f^{(13)} = f.$$

Аналогично, ввиду условия $f^{(8)} = f$,

$$f^{(65)} = f^{(57)} = f^{(49)} = \cdots = f^{(9)} = f^{(1)}.$$

Поэтому $f' = f$. Следовательно,

$$\left(e^{-x} f(x)\right)' = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x}\left(f'(x) - f(x)\right) = 0.$$

Значит, $e^{-x} f(x) = c$ для некоторой константы c. Окончательно находим, что

$$f(x) = ce^{x}.$$