XII Дальневосточная студенческая математическая олимпиада
Хабаровск — 2010

Задача 1. Найти значение двадцать первой производной функции $y(x) = e^{x^2}$ в точке $x = 0$.

Решение. Производная четной функции является нечетной и наоборот. Поэтому 21 производная – нечетная функция, и для нее

$$y^{(21)}(0) = -y^{(21)}(0) = 0.$$

Задача 2. Пусть заданы два вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ единичной длины на плоскости с углом φ между ними. При каких значениях φ длины сумм и разностей этих векторов одновременно больше 1?

Решение. Для кратности пусть $\overrightarrow{OA} = a$ и $\overrightarrow{OB} = b$ и (a, b) – скалярное произведение. По условию

$$\begin{aligned} 1 < |a-b|^2 &= (a-b, a-b) = (a,a) - 2(a,b) + (b,b) = \\ &= |a|^2 - 2|a||b|\cos\varphi + |b|^2 = 2(1-\cos\varphi). \end{aligned}$$

Поэтому $\cos\varphi < \frac{1}{2}$. Аналогично,

$$1 < |a+b|^2 = (a+b, a+b) = 2(1+\cos\varphi)$$

и поэтому $\cos\varphi > -\frac{1}{2}$. Из этих двух неравенств следует, что $\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{2\pi}{3}$.

Задача 3. Найти минимальное значение функции

$$f(x, y) = \max\{x, y, 1 - xy\}$$

при $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$.

Решение. Так как $f(x, y) = f(y, x)$, то без ограничения общности можно считать, что $0 \le x \le y \le 1$. В таком случае

$$f(x, y) = \max\{y, 1 - xy\} \ge f(y, y) = \max\{y, 1 - y^2\}.$$

Минимум $f(y, y)$ достигается при $y = 1 - y^2$. Следовательно, интересующий нас минимум равен $\left(\sqrt{5} - 1\right)/2$.

Задача 4. Матрица $n \times n$ заполнена нулями и единицами. В каждом столбце она содержит k единиц ($k < n$). Докажите, что определитель матрицы делится на k.

Решение. Определитель матрицы не изменится, если все ее строки (начиная со второй) прибавить к первой строке. Тогда все элементы первой строки будут делиться на k, а, следовательно, и определитель также будет делиться на k.

Задача 5. Фокусник с ассистентом показывают следующий фокус. Сначала зрители на доске случайным образом пишут ряд из $n = 20$ цифр. Затем ассистент на свой выбор заклеивает одну из цифр бумажной карточкой. После этого в зал входит фокусник и называет заклеенную цифру.

а) Приведите пример алгоритма, который позволяет показывать такой фокус.

б) Для какого наименьшего числа n такой алгоритм можно построить?

Решение. а) Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{19}$ – это цифры, написанные на доске. Тогда, если ассистент заклеивает цифру с номером $k = x_0 + x_1 + \cdots + x_{19} (\mathrm{mod}\ 10)$, то фокусник может восстановить ее значение из условий

$$x_k \equiv k - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_{k+1} + \cdots + x_{19}) \pmod{10}, \qquad 0 \le x_k \le 9.$$

б) Описанный алгоритм работает и в случае, когда $n = 10$. Если же $n < 10$, то зрители могут всего написать 10^n наборов цифр. Наборов, в которых одна цифра заклеена, суть $n \cdot 10^{n-1} < 10^n$. Поэтому, независимо от выбранного алгоритма, найдутся два различных набора цифр, которые после действий ассистента превратятся в одну и ту же комбинацию и будут неразличимы для фокусника.