XIII Дальневосточная межвузовская олимпиада по математике
Хабаровск — 2011

Задача 1. Пусть $\mathbb{M}$ — множество, состоящее из 2013 пар вещественных чисел, такое что если $(x, y) \in \mathbb{M}$, то и $(-y, x) \in \mathbb{M}$. Доказать, что $(0, 0) \in \mathbb{M}$.

Решение. Пусть $(x, y) \in \mathbb{M}$. Тогда $(x_1, y_1) = (-y, x) \in \mathbb{M}$ и $(x_2, y_2) = (-y_1, x_1) = = (-x, -y) \in \mathbb{M}$. Поэтому любой ненулевой паре (x, y) соответствует другая пара $(-x, -y)$. Так как количество элементов множества $\mathbb{M}$ нечётно, то существует пара для которой (x, y) совпадает с $(-x, -y)$; то есть $x = -x$ и $y = -y$. Поэтому $(0, 0) \in \mathbb{M}$.

Задача 2. Пусть $r_k(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(2^{k+1}\pi x\right)\right)$, где $x \in [0, 1]$, $k = 0, 1, \ldots$.
Доказать, что

$$\int\limits_0^1 r_n(x)\, r_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 1, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

(Если $x < 0$, то $\operatorname{sign} x = -1$; если $x = 0$, то $\operatorname{sign} x = 0$; если $x > 0$, то $\operatorname{sign} x = 1$).

Решение. 1) Если $m = n$, то $r_n(x)\, r_m(x) = r_n^2(x) = 1$, за исключением конечного числа точек x. Поэтому

$$\int\limits_0^1 r_n(x)\, r_m(x)\, dx = \int\limits_0^1 r_n^2(x)\, dx = 1.$$

2) Пусть теперь $m \neq n$ и $n < m$, $m = n + l$. Функция $r_k(x)$ постоянна на интервалах $\left(\dfrac{a}{2^{k+1}}, \dfrac{a+1}{2^{k+1}}\right)$, где $a = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^{k+1} - 1$. Если $x = \dfrac{a}{2^{k+1}} + y$, где $0 < y < \dfrac{1}{2^{k+1}}$, то

$$\operatorname{sign}\left(\sin 2^{k+1}\pi\, x\right) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\pi\, a + 2^{k+1}\pi\, y\right)\right) = (-1)^a .$$

Значит, на соседних интервалах такого вида функция $r_k(x)$ имеет разные знаки. Поэтому

$$\int\limits_{\frac{a}{2^{n+1}}}^{\frac{a+1}{2^{n+1}}} r_n(x)\, r_m(x)\, dx = (-1)^a \int\limits_{\frac{a}{2^{n+1}}}^{\frac{a+1}{2^{n+1}}} r_{n+l}(x)\, dx = (-1)^a \sum_{b=0}^{2^l-1} \int\limits_{\frac{a}{2^{n+1}}+\frac{b}{2^{n+1+l}}}^{\frac{a}{2^{n+1}}+\frac{b+1}{2^{n+1+l}}} r_{n+l}(x)\, dx =$$

$$= (-1)^a \sum_{b=0}^{2^l-1} (-1)^b \frac{1}{2^{n+1+l}} = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 r_n(x)\, r_m(x)\, dx = \sum_{a=0}^{2^{n+1}-1} \int\limits_{\frac{a}{2^{n+1}}}^{\frac{a+1}{2^{n+1}}} r_n(x)\, r_m(x)\, dx = 0.$$

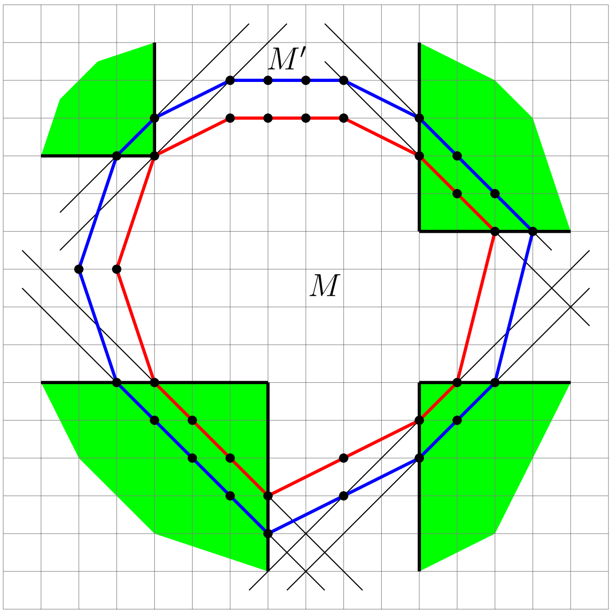
Задача 3. Пусть a и b — вещественные числа. Какое наибольшее число вещественных корней может иметь уравнение $e^x + ax + b = 0$?

Решение. Пример уравнения $e^x - x - 2 = 0$ показывает, что может быть два корня. Докажем, что больше корней быть не может. Предположим противное. Пусть исходное уравнение имеет более двух корней. Тогда функция $f(x) = e^x + ax + b$ имеет два соседних интервала знакопостоянства, на концах которых она равна 0. Следовательно (по теореме Ролля), найдутся две точки, в которых производная $f'(x) = e^x + a$ равна нулю. Но уравнение $e^x + a = 0$ имеет не больше одного корня. Получили противоречие.

Ответ. 2 корня.

Задача 4. Вершины выпуклого многоугольника M находятся в узлах (точках (m, n) с целыми m и n) целочисленной решётки на координатной плоскости. Каждая вершина многоугольника M заменяется на 4 соседние (по вертикали и горизонтали) точки в узлах решётки. Многоугольник M' есть выпуклая оболочка всех полученных точек (т. е. наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все эти точки). Сколько точек решётки будет лежать на границе M', если на границе многоугольника M лежало P точек решётки?

Решение. Проведём опорные прямые к многоугольнику M, проходящие под углом 45^0 к осям координат.



После перехода к многоугольнику M' отрезки границы между отрезками на опорных прямых перейдут в новые с тем же числом целых точек, а на остальных добавится по одной точке.

Ответ. $P + 4$.

Задача 5. Пусть

$$\begin{aligned} A_0 &= \left(2^{n-1}, 2^{n-2}, 2^{n-3}, \ldots, 2^1, 2^0\right), \\ A_1 &= \left(2^0, 2^{n-1}, 2^{n-2}, \ldots, 2^2, 2^1\right), \\ A_2 &= \left(2^1, 2^0, 2^{n-1}, \ldots, 2^3, 2^2\right), \\ &\ldots \\ A_{n-1} &= \left(2^{n-2}, 2^{n-3}, 2^{n-4}, \ldots, 2^0, 2^{n-1}\right) \end{aligned}$$

— n-мерные векторы, и для некоторых вещественных $x_0, \ldots, x_{n-1}$

$$(y_0, \ldots, y_{n-1}) = x_0\, A_0 + x_1\, A_1 + \cdots + x_{n-1}\, A_{n-1}.$$

Доказать, что $\max\bigl\{|y_0|, \ldots, |y_{n-1}|\bigr\} \geqslant \max\bigl\{|x_0|, \ldots, |x_{n-1}|\bigr\}$.

Решение. Пусть $x_0, \ldots, x_{n-1}$ — произвольный набор вещественных чисел, одновременно не равных нулю и $|x_k| = \max\bigl\{|x_0|, \ldots, |x_{n-1}|\bigr\}$. Так как

$$y_k = \sum_{0 \leqslant l < k} x_l\, 2^{n-1-k+l} + x_k\, 2^{n-1} + \sum_{k < l \leqslant n-1} x_l\, 2^{l-k-1},$$

то

$$|y_k| \geqslant |x_k|\, 2^{n-1} - |x_k| \sum_{l=0}^{n-2} 2^l = |x_k|.$$