Открытая краевая межвузовская олимпиада по математике
Хабаровск-2014

Задача 1. Пусть $G(x), P(x)$ и $R(x)$ — многочлены от переменной x и степень G равна n. Предположим, что для любых x_1 и x_2

$$G(x_1 + x_2) = P(x_1)R(x_2).$$

Доказать, что
а) не существует таких многочленов при $n = 1$;
б) не существует таких многочленов при $n = 2$;
в) не существует таких многочленов для любого натурального n.

Доказательство. Из основной теоремы алгебры известно, что существует комплексное число z, для которого $G(z) = 0$. Положим $x_2 = z - x_1$. Тогда для любого x_1

$$P(x_1)R(z - x_1) = 0,$$

чего не может быть.

Задача 2. Пусть $g(x, y)$ — функция от двух вещественных переменных ($g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Предположим, что найдутся четыре функции $h_1, h_2, r_1, r_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых $g(x, y) = r_1(x)h_1(y) + r_2(x)h_2(y)$. Доказать, что для любых вещественных $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ определитель матрицы 3×3, у которой на пересечении i-ой строки и j-ого столбца стоит число $g(x_i, y_j)$, равен нулю.

Доказательство. Из уравнения, связывающего функции, следует что каждая строка матрицы есть линейная комбинация двух одних и тех же векторов. Поэтому строки матрицы линейно зависимы и её определитель равен нулю.

Задача 3. Пусть $h_1, h_2, h_3, \ldots$ — неограниченная возрастающая последовательность неотрицательных вещественных чисел. Доказать, что найдётся абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, такой что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n c_n$ расходится.

Указание. Попробуйте сначала доказать утверждение для последовательности $\{h_n\}$ с $h_n = \ln n$.

Доказательство. Так как последовательность $\{h_n\}$ неограниченно возрастает, то найдется подпоследовательность номеров $n = n_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$, для которой $h_{n_k} \geq 2^k$. Выберем ряд, у которого $c_n = \frac{1}{2^k}$, если $n = n_k$, а для остальных номеров n полагаем $c_n = 0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n c_n = \sum_{k=1}^{\infty} h_{n_k} c_{n_k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} > \infty.$$

В то же время

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$