Краевая математическая олимпиада школьников
г. Хабаровск, 2004 год

9 КЛАСС

Задача 1. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — различные числа на вещественной оси из полуинтервала (0, 1]. Доказать, что найдутся хотя бы два из них, расстояние между которыми меньше 1/3.

Решение. Разобьем (0, 1] на три полуинтервала:

$$\left(0, \frac{1}{3}\right], \ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \ \left(\frac{2}{3}, 1\right].$$

Так как чисел на единицу больше, то хотя бы два из них попадут в один полуинтервал, а расстояние между двумя числами в любом из указанных трех полуинтервалах меньше $\frac{1}{3}$. Что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что квадрат любого нечетного натурального числа при делении на 8 дает в остатке единицу.

Решение. Любое нечетное число имеет вид $2k-1$ с некоторым натуральным k. Заметим, что

$$(2k-1)^2 = 4k(k-1) + 1.$$

Так как k или $k-1$ — четно, то при делении на 8 в остатке получим 1. А это и требовалось доказать.

Задача 3. Пусть a — длина основания некоторого треугольника. Найти длину отрезка, параллельного основанию, который разбивает треугольник на две равновеликие части.

Решение. Пусть ABC — исходный треугольник с основанием AC, длина которого равна a. Далее, A_1C_1 — отрезок, параллельный основанию AC, с точками A_1 и C_1 на сторонах AB и BC соответственно. Пусть h_1 — высота A_1BC_1 и h — высота ABC. По условию

$$\frac{1}{2}AC \cdot h = S_{ABC} = 2S_{A_1BC_1} = A_1C_1 \cdot h_1,$$

поэтому

$$\frac{A_1C_1}{AC} \cdot \frac{h_1}{h} = \frac{1}{2}.$$

Так как $\triangle ABC$ подобен $\triangle A_1BC_1$, то

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{h_1}{h}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{A_1C_1}{AC}\right)^2 = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ A_1C_1 = \frac{AC}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому $A_1C_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Задача 4. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Независимо от своего расположения белая ладья бьет 14 клеток и занимает одно поле. Значит, остается $64 - 15 = 49$ полей, на любое из которых можно поставить черную ладью. Поэтому имеется всего $49 \cdot 64 = 3136$ способов.

Задача 5. Сын, отца депутата разговаривает с отцом сына депутата, причем сам депутат в разговоре не участвует. Может ли такое быть?

Решение. Да, может, если депутат женщина.

10 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что числа $2n^2$ и $2n+1$ взаимно просты при всех натуральных n.

Решение. Пусть d — наибольший общий делитель $2n+1$ и $2n^2$. Так как

$$n(2n+1) - 2n^2 = n,$$

то n также делится на d. Но тогда и

$$(2n+1) - 2n = 1$$

делится на d. А это может быть только для $d = 1$.

Задача 2. Пять различных точек расположены внутри квадрата со стороной 2. Доказать, что найдутся хотя бы две из них, расстояние между которыми меньше $\sqrt{2}$.

Решение. Разобьем квадрат на четыре меньших квадрата со стороной 1. Так как точек 5, то хотя бы две попадут в один из них. В таком случае расстояние между ними не больше длины диагонали, равной $\sqrt{2}$. Знак равенства возможен только в случае, когда одна из них попадает на границу квадрата, что противоречит условию. Тем самым нужное утверждение полностью доказано.

Задача 3. Пусть основания трапеции равны a и b. Найти длину отрезка, параллельного основаниям, который разбивает ее на две равновеликие части.

Решение. Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC длины a и b соответственно. Обозначим через MN отрезок, параллельный основаниям и разбивающий $ABCD$ на две равновеликие части. Пусть также h_1 и h_2 — высоты трапеций $MBCN$ и $AMND$ соответственно, а x — длина MN. Пусть S — площадь всей трапеции. Тогда, по условию

$$\frac{1}{2}(a+x)h_1 = \frac{1}{2}(x+b)h_2 = \frac{1}{2}S,$$
$$\frac{1}{2}(h_1+h_2)(a+b) = S.$$

Следовательно,

$$\frac{2S}{a+b} = h_1 + h_2 = \frac{S}{a+x} + \frac{S}{b+x}.$$

Поэтому

$$\frac{2}{a+b} = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} \quad \to \quad x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Задача 4. Петин кот перед дождем всегда чихает. Сегодня он чихнул. «Значит, сегодня будет дождь» — подумал Петя. Прав ли он?

Решение. Нет, не прав. Ведь изначально не предполагается, что кот чихает *тогда и только тогда*, когда пойдет дождь.

Задача 5. Произведение двух положительных чисел больше их суммы. Доказать, что сумма больше 4.

Решение. Условие $xy > x+y$ можно переписать в виде $(x-1)(y-1) > 1$. Поэтому $x > 1$ и $y > 1$. Но тогда по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$x + y = 2 + (x-1) + (y-1) \geqslant 2 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} > 2 + 2 = 4.$$

Что и требовалось доказать.

11 КЛАСС

Задача 1. Внутри равностороннего треугольника со стороной 2 находятся 5 различных точек. Доказать, что среди них найдутся по крайней мере две, расстояние между которыми меньше единицы.

Решение. Отрезками с концами в серединах сторон разобьем исходный треугольник на 4 правильных со стороной 1. Из пяти точек по крайней мере две попадут в один из них. Для такой пары расстояние между ними меньше 1.

Задача 2. Пусть числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 0$. Доказать, что $ab + bc + ca \leqslant 0$.

Решение. Заметим, что

$$0 = (a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca).$$

Первое слагаемое $\geqslant 0$. Но тогда второе $\leqslant 0$. А это и требовалось доказать.

Задача 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ zx = 8. \end{cases}$

Решение. Перемножив все уравнения, получим $(xyz)^2 = 16$. Поэтому

$$xyz = 4 \quad \text{или} \quad xyz = -4.$$

В первом случае

$$x = \frac{xyz}{yz} = \frac{4}{2} = 2, \quad y = \frac{xyz}{xz} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{xyz}{xy} = \frac{4}{1} = 4.$$

Во втором случае точно так же получается еще одно решение:

$$x = -2, \;\; y = -0.5, \;\; z = -4.$$

Задача 4. Треугольник имеет площадь, равную 1. Доказать, что длина его средней (по длине) стороны не меньше, чем $\sqrt{2}$.

Решение. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$ — стороны треугольника. Площадь S треугольника равна $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, где α — угол между сторонами b и c. Поэтому $S \leqslant \frac{1}{2}bc \leqslant \frac{1}{2}b^2$. Отсюда получаем

$$b = \sqrt{b^2} \geqslant \sqrt{2S} = \sqrt{2}.$$

Задача 5. Из набора домино выбросили все кости, в которых встречается «пусто». Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд?

Решение. Предположим, что это можно сделать. Тогда одно из чисел 1, 2, 3 не встречается на концах. Пусть это число 3. Заметим, что внутри цепи троек четное количество (они разбиваются на пары по правилу складывания цепи). Но всего троек после выкидывания костей с «пусто» осталось семь (нечетное число!). Мы пришли к противоречию.

Ответ: нет, нельзя.