Краевая математическая олимпиада школьников
г. Хабаровск, 2005 год

9 КЛАСС

Задача 1. Можно ли расставить знаки «+» или «–» между числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы в итоге получился нуль?

Решение. Поскольку при любой расстановке знаков получается нечетное число (1, 3, 5 — нечетные!), то этого не может быть.

Задача 2. Расставить по кругу 6 различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению соседних.

Решение. 2, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

Задача 3. Сколько имеется натуральных чисел, совпавших с суммой своих цифр в десятичной записи?

Решение. Пусть $N = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ — десятичная запись числа с цифрами $a_k, a_{k-1}, \ldots,$ a_1, a_0. По условию

$$N = a_k 10^k + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 = a_k + \cdots + a_1 + a_0.$$

Следовательно,

$$a_k(10^k - 1) + \cdots + a_1(10 - 1) = 0.$$

Но тогда $a_k = a_{k-1} = \cdots = a_1 = 0$. Поэтому N — цифра и таких чисел 9.

Задача 4. Доказать, что любая диагональ четырехугольника меньше половины его периметра.

Решение. Пусть A, B, C, D — последовательные вершины четырехугольника с периметром p и AC — его диагональ. Тогда

$$AB + BC > AC \quad \text{и} \quad AD + DC > AC.$$

Следовательно,

$$p = AB + BC + DC + AD > 2AC$$

и $AC < p/2$. Что и требовалось доказать.

Задача 5. Доказать, что если 10 человек собрали 40 грибов, то найдутся два из них, которые собрали одинаковое число грибов.

Решение. Если у всех разное число грибов, то всего было собрано не менее

$$0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

грибов, что противоречит условию задачи.

10 КЛАСС

Задача 1. Можно ли расставить знаки «+» или «–» между числами 1, 3, 9, 15, 18 так, чтобы в итоге получился нуль?

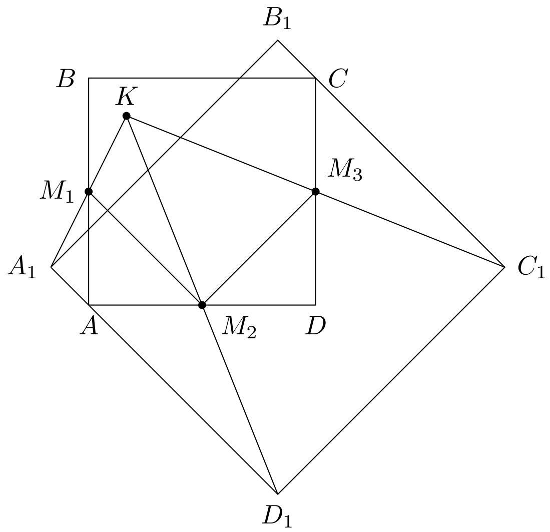
Решение. Нельзя по причине того, что первое число не делится на 3.

Задача 2. В вазе лежат 20 яблок и груш. Среди любых 8 фруктов имеется хотя бы одно яблоко, а среди любых 14 — хотя бы одна груша. Сколько яблок в вазе?

Решение. Из условия следует, что в вазе не менее 13 яблок и не менее 7 груш. Так как всего 20 фруктов, то яблок — 13.

Задача 3. Доказать, что 4 точки, симметричные произвольной точке внутри квадрата относительно середин его сторон, являются вершинами некоторого квадрата.

Решение. См. чертеж.



Задача 4. Доказать, что если $x + y + z = 0$, то

$$xy + yz + zx \leqslant 0.$$

Решение. Так как

$$0 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx,$$

то $xy + yz + zx \leqslant 0$.

Задача 5. На плоскости даны 5 точек. Любые четыре из них являются вершинами четырехугольника. Докажите, что эти 5 точек являются вершинами выпуклого 5-угольника.

Решение. Рассмотрим произвольные четыре точки, составляющие выпуклый четырехугольник $ABCD$. Разобьем его на треугольники ABC и ADC диагональю AC. Если пятая точка E принадлежит $ABCD$, то она принадлежит одному из треугольников, к примеру, ABC. Но тогда четыре точки A, B, C, E не образуют выпуклый четырех угольник, что противоречит условию. Поэтому точка E лежит вне $ABCD$ и все пять точек составляют выпуклый пятиугольник.

11 КЛАСС

Задача 1. Можно ли расставить знаки «+» и «–» между числами 1, 3, 6, 7, 9, 11 так, чтобы в итоге получился нуль?

Решение. Из трех чисел 1, 7, 11 никак нельзя составить комбинацию, которая делится на три. Поэтому при её сложении или вычитании с остальными, делящимися на три числами, не может получиться нуль.

Задача 2. Доказать, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше четырех.

Решение. По условию $xy > x + y$. Поэтому

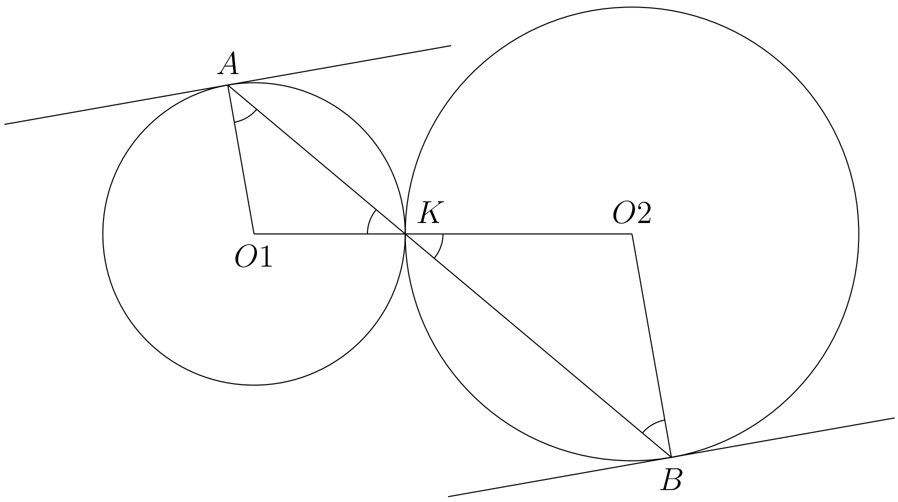
$$(x+y)^2 \geqslant 4xy > 4(x+y) \quad \Rightarrow \quad x+y > 4.$$

Задача 3. Какое наибольшее число воскресений может быть в феврале?

Решение. В високосный год в феврале 29 дней. Если февраль начинается с воскресенья, то он оканчивается воскресеньем, поскольку $29 = 7 \cdot 4 + 1$. Поэтому ответ — 5.

Задача 4. Две окружности касаются друг друга в точке K. Прямая, проходящая через K, пересекает эти окружности в точках A и B. Доказать, что касательные к окружностям, проведенные через точки A и B, параллельны.

Решение. См. рисунок.



Задача 5. Найти целые a, b, c, для которых число $\sqrt[3]{2} - 1$ будет корнем уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Решение.

$$0 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 2 = \left(\left(\sqrt[3]{2} - 1\right) + 1\right)^3 - 2 = (x+1)^3 - 2 = x^3 + 3x^2 + 3x - 1.$$