

8 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что сумма любых двенадцати последовательных чисел натурального ряда не делится на 4.

Решение. Заметим, что

$$(k+1) + (k+2) + \dots + (k+12) = 12k + 2 \cdot 39.$$

Второе слагаемое не делится на 4, а поэтому и все число не делится на 4.

Задача 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 1.$$

Решение. Так как $x \geq 0$ и $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$, то решений нет.

Задача 3. Доказать, что для $x \geq 0$ выполняется неравенство

$$2x + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{x}.$$

Решение. Утверждение немедленно следует из равенства

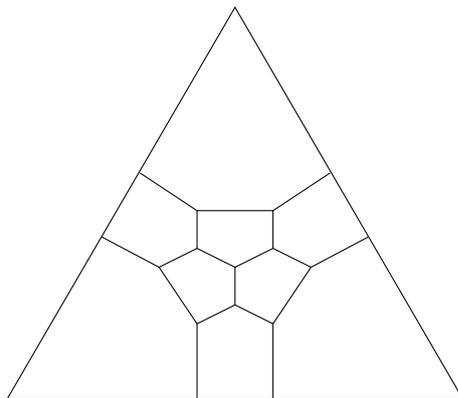
$$2x + \frac{1}{2} - 2\sqrt{x} = 2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Задача 4. Пусть в выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ стороны AB и BC параллельны и равны соответственно сторонам DE и EF . Доказать, что диагонали AD , BE , CF пересекаются в одной точке.

Решение. Так как $ABDE$ — параллелограмм, то O — точка пересечения AD и BE , делит их пополам. По той же причине O — точка пересечения BE и CF .

Задача 5. Можно ли разрезать правильный треугольник на выпуклые пятиугольники?

Решение. Да (смотри рисунок).



9 КЛАСС

Задача 1. Найти корни квадратного уравнения

$$x^2 - (2^{2007} + 1)x + 2^{2007} = 0.$$

Решение. Очевидно, что $x_1 = 1$ — корень уравнения. По теореме Виета $x_2 = 2^{2007}$ — второй корень уравнения.

Задача 2. На какую цифру оканчивается число 9^{2007} ?

Решение. Так как

$$9^{2007} = 9 \cdot 9^{2006} = 9 \cdot 81^{1003}$$

и 81 в любой степени оканчивается на 1, то интересующее нас число оканчивается на 9.

Задача 3. Доказать, что для $x \geq 1$ выполняется неравенство

$$x^2 + x \leq x^4 + 1.$$

Решение. Согласно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2.$$

Поэтому

$$1 + \frac{1}{x} \leq 2 \leq x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + x \leq x^4 + 1.$$

Задача 4. Угол B выпуклого четырехугольника $ABCD$ равен углу D , а диагональ AC делится другой диагональю BD пополам. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

Решение. Пусть O — точка пересечения AC и BD . Отложим на продолжении BO в сторону точки D отрезок OD' , равный BO . По углу и двум прилежащим сторонам треугольник BOC равен треугольнику AOD' . Поэтому $ABCD'$ — параллелограмм. Но в таком случае угол $AD'C$ равен углу ADC . А это может быть только в случае совпадения точек D' и D .

Задача 5. При каких целых $a \geq 0$ число $\sqrt{a + \sqrt{a}}$ — целое?

Решение. Пусть $m = \sqrt{a + \sqrt{a}}$ — целое. Тогда

$$a + \sqrt{a} = m^2 \Rightarrow a = (m^2 - a)^2 \Rightarrow a^2 - (2m^2 + 1)a + m^4 = 0 \Rightarrow a = \frac{2m^2 + 1 \pm \sqrt{4m^2 + 1}}{2}.$$

Так как при целых $k \geq 1$ выполняется неравенство $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1 > 1$, то $4m^2 + 1$ является квадратом только для $m = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

10 КЛАСС

Задача 1. Найти остаток от деления 7^{2007} на 3.

Решение. Так как

$$7^{2007} - 1 = (7 - 1)(7^{2006} + 7^{2005} + \dots + 7 + 1),$$

то для некоторого целого k : $7^{2007} = 3k + 1$. Следовательно, остаток равен 1.

Задача 2. Пусть для вещественных x и y выполняется неравенство $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$. Доказать, что

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

Решение. Из исходного неравенства следует, что $|x - 1| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$. Поэтому

$$x^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2x - 1 = (x - 1)^2 + y^2 + 2x - 1 \leq 1 + 2 \cdot 2 - 1 = 4.$$

Задача 3. Пусть квадратные уравнения $a_1x^2 + 2b_1x + c_1 = 0$ и $a_2x^2 + 2b_2x + c_2 = 0$ не имеют решений. Доказать, что уравнение

$$a_1a_2x^2 + 2b_1b_2x + c_1c_2 = 0$$

также не имеет решений.

Решение. Из условия следует, что

$$b_1^2 < a_1c_1 \quad \text{и} \quad b_2^2 < a_2c_2.$$

Перемножив эти неравенства, получим, что $(b_1b_2)^2 < (a_1a_2)(c_1c_2)$. Поэтому и третье уравнение не имеет решений.

Задача 4. На окружности расположено 6 различных точек. Одну из них покрасили в красный цвет, а остальные в белый. Каких выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках больше: тех, которые содержат красную точку или тех, которые не содержат ее?

Решение. Любому многоугольнику с n белыми вершинами соответствует $n+1$ -угольник с добавленной красной вершиной. При этом еще остаются треугольники с красной вершиной. Таким образом, многоугольников с красной вершиной больше.

Задача 5. Пусть две стороны и медиана, исходящие из какой-нибудь вершины одного треугольника, совпадают с соответствующими элементами другого треугольника. Доказать, что они равны.

Решение. Треугольник однозначно определяется параллелограммом по его сторонам и диагонали (удвоенная медиана).

11 КЛАСС

Задача 1. Найти все натуральные m и n , для которых $m^2 - mn - 2n^2 = 13$.

Решение. Так как $4 \cdot 13 = 4m^2 - 4mn - 8n^2 = (2m - n)^2 - (3n)^2 = (2m - 4n)(2m + 2n)$, то $(m - 2n)(m + n) = 13$. Поэтому

$$m - 2n = 1 \quad \text{и} \quad m + n = 13 \quad \implies \quad m = 9 \quad \text{и} \quad n = 4.$$

Задача 2. Доказать, что $\sqrt[9]{9} < \sqrt[8]{8}$.

Решение. Заметим, что

$$\sqrt[9]{9} < \sqrt[8]{8} \iff 9^8 < 8^9 \iff \left(\frac{9}{8}\right)^8 < 8.$$

Окончательно находим

$$\left(\frac{9}{8}\right)^8 = \left(\frac{81}{64}\right)^4 < \left(\frac{88}{64}\right)^4 = \left(\frac{11}{8}\right)^4 = \left(\frac{121}{64}\right)^2 < \left(\frac{128}{64}\right)^2 = 4 < 8.$$

Задача 3. Доказать, что в любом треугольнике найдутся две стороны a и b , для которых

$$1 \leq \frac{b}{a} < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Решение. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, расположенные в порядке неубывания. Предположим, что утверждение неверно. То есть,

$$\frac{b}{a} \geq \alpha \quad \text{и} \quad \frac{c}{b} \geq \alpha \quad \text{с} \quad \alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Так как $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 1$, то

$$a + b \leq \frac{1}{\alpha}b + \frac{1}{\alpha}c \leq \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\right)c = c.$$

То есть, сумма двух сторон треугольника не превосходит третью, чего не может быть. Значит, выполняется хотя бы одно из неравенств:

$$1 \leq \frac{b}{a} < \alpha, \quad 1 \leq \frac{c}{b} < \alpha.$$

Задача 4. Пусть $0 \leq x \leq 1$. Доказать, что

$$\sqrt{1 - x^2} + x \leq \sqrt{2}.$$

Решение. Заметим, что $x = \cos \alpha$ при некотором $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2} + x &= \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Задача 5. Даны две концентрические окружности. В каждой из них проведено по хорде. Причем, хорды параллельны и равны. Доказать, что концы хорд являются вершинами прямоугольника.

Решение. Перпендикуляр, опущенный из единого центра окружностей на хорды, делит их пополам. Отсюда немедленно следует нужное утверждение.