Районная олимпиада по математике
г. Хабаровск, 1997 год

9 КЛАСС

Задача 1. При каких целых n дробь $\frac{5n-3}{n-3}$ — целое число?

Решение. Заметим, что
$$\frac{5n-3}{n-3} = 5 + \frac{12}{n-3}.$$
Поэтому это число целое только в случаях
$$n-3 = -12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12.$$

Задача 2. Доказать, что для любого действительного x выполняется неравенство
$$3x^2 + \frac{1}{3x^2+1} \geq 1.$$

Решение. Неравенство эквивалентно (прибавляем по 1 к обеим частям) следующему
$$(3x^2+1) + \frac{1}{3x^2+1} \geq 2,$$
которое следует из неравенства $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (о среднем арифметическом и среднем геометрическом) при
$$a = 3x^2+1, \quad b = \frac{1}{3x^2+1}.$$

Задача 3. В куске картона вырезан прямоугольник со сторонами $2a$ и $a\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Полученный шаблон наложили на квадрат со стороной a. Оказалось, что большая сторона шаблона составила с одной из сторон квадрата угол в 30°. Какой может быть наибольшая площадь части квадрата, видимой в щель?

Решение. Несложные вычисления, основанные на теореме Пифагора, показывают, что возможно расположение квадрата, две противоположные вершины которого лежат на больших сторонах шаблона. Очевидно, что любое смещение квадрата вверх или вниз уменьшает площадь видимой части. Следовательно, максимальная площадь видимой части равна $a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Задача 4. Существует ли описанный около окружности четырехугольник, длины сторон которого — целые числа и их сумма равна 9?

Решение. Пусть a, b, c, d — длины последовательных сторон описанного четырехугольника. Так как $a + c = b + d = l$, то $a + c + b + d = 2l$. Следовательно, сумма длин сторон — четное число. А по условию она равна 9 — нечетное число. Поэтому такого четырехугольника не существует.

10 КЛАСС

Задача 1. При каких целых n дробь

$$\frac{4n^3-9n^2+4n+1}{n^2+1}$$

принимает целые значения?

Решение. Так как

$$\frac{4n^3-9n^2+4n+1}{n^2+1}=\frac{4n(n^2+1)-9(n^2+1)+10}{n^2+1}=4n-9+\frac{10}{n^2+1},$$

то дробь будет целым числом только для

$$n=-3,-2,-1,0,1,2,3.$$

Задача 2. Доказать, что для любых действительных x выполняется неравенство

$$3x^2+x+\frac{1}{3x^2+x+1}\geq 1.$$

Решение. Прибавляя к обеим частям неравенства по 1, получим

$$3x^2+x+1+\frac{1}{3x^2+x+1}\geq 2.$$

Последнее неравенство следует из $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ для

$$a=3x^2+x+1,\quad b=\frac{1}{3x^2+x+1},$$

поскольку

$$3x^2+x+1=3(x+1/6)^2+1-1/12>0$$

для любого вещественного x.

Задача 3. Существует ли выпуклый четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, а длины сторон — целые числа и их сумма равна 7?

Решение. Пусть a,b,c,d — последовательные стороны четырехугольника, у которого перпендикулярные диагонали разбиваются точкой пересечения на отрезки длиной x,y,u,v.

По теореме Пифагора $a^2=x^2+u^2$, $b^2=u^2+y^2$, $c^2=y^2+v^2$, $d^2=v^2+x^2$. Складывая первое равенство с третьим, а второе с четвертым, получим

$$a^2+c^2=x^2+y^2+u^2+v^2=b^2+d^2.$$

То есть, для целых чисел a,b,c,d выполняется равенство $a^2+c^2=b^2+d^2$. Далее

$$(a+c+b+d)^2=(a+c)^2+(b+d)^2+2(a+c)(b+d)=$$
$$=a^2+c^2+b^2+d^2+2ac+2bd+2(a+c)(b+d).$$

Но $a^2+c^2+b^2+d^2=2(a^2+c^2)$. Следовательно, $a+c+b+d$ — четное число. Поэтому не существует четырехугольника с суммой сторон 11.

Задача 4. Заданы 10 различных натуральных чисел, не превосходящих 23. Доказать, что найдутся четыре различных числа a,b,c,d среди них, для которых $a+b=c+d$.

Решение. Пусть $a_1, \ldots, a_{10}$ — натуральные ≤ 23. Имеется

$$9 + 8 + \cdots + 2 + 1 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

различных пар чисел

$$(a_1, a_2), (a_1, a_3), \ldots, (a_9, a_{10}).$$

Для каждой пары сумма входящих в нее чисел больше 2 и меньше 46. Следовательно, по принципу Дирихле найдутся две различные пары с одинаковой суммой. А это и требовалось доказать.

11 КЛАСС

Задача 1. При каких целых n дробь

$$\frac{n^3 - 2n^2 + 2n + 1}{n^2 + 1}$$

принимает целые значения?

Решение. Заметим, что

$$\frac{n^3 - 2n^2 + 2n + 1}{n^2 + 1} = \frac{n^3 + n - 2n^2 - 2 + n + 3}{n^2 + 1} = n - 2 + \frac{n + 3}{n^2 + 1}.$$

Если дробь целая, то $n^2 + 1 \leq |n + 3|$. Рассмотрим два случая а) $n \geq -3$. Тогда

$$n^2 + 1 \leq n + 3 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (n - 1/2)^2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 2.$$

Простой, подстановкой убеждаемся, что все четыре значения $n = -1, 0, 1, 2$ удовлетворяют условию задачи.

б) $n < -3$. Тогда

$$n^2 + 1 \leq -n - 3 \Leftrightarrow n^2 + n + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (n + 1/2)^2 + 17/4 \leq 0.$$

Последнее неравенство не выполняется ни при каких n.

Задача 2. Доказать, что для любых допустимых значений x выполняется неравенство $2x^{\frac{1}{2}} \leq x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}$.

Решение. Для $x = 0$ неравенство верно. Пусть $x > 0$. Тогда для $a = x^{2/3}$, $b = x^{1/3}$ из неравенства $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ находим

$$x^{2/3} + x^{1/3} \geq 2\sqrt{x^{2/3+1/3}} = 2\sqrt{x}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ M — середина ребра A_1B_1, а N — центр грани B_1C_1CB. Рассмотрим всевозможные сечения квадрата, параллельные плоскости (AMN). Не применяя производную определите площадь наибольшего из сечений, если сторона куба равна 1.

Решение. *I*. Построение. Пусть $AM \cap BB_1 = X$ (заметим, что $BB_1 = B_1X$), X принадлежит сечению и именно по ней секущая плоскость пересекает грань BB_1C_1C.

Пусть $XN \cap B_1C_1 = K$ и $XN \cap BC = L$, тогда $AMKL$ — искомое сечение (рис. 1). Определим точное положение точек L и K. Рассматривая изображенные на рис. 2 треугольники XB_1K, XN_1N и XBL (прямоугольные и подобные), легко увидеть, что $B_1K = 1/3$, $BL = 2/3$.

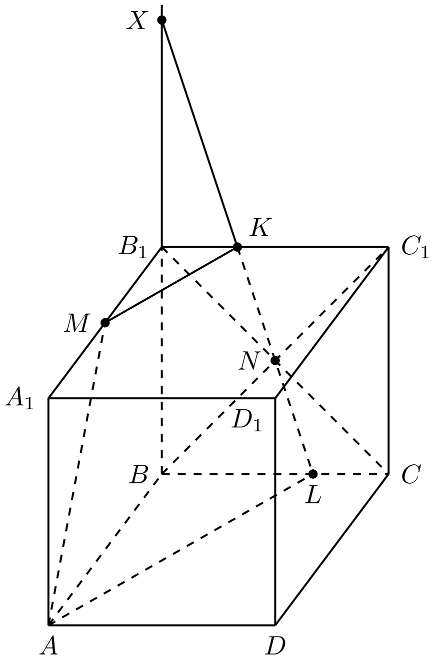

Рис. 1

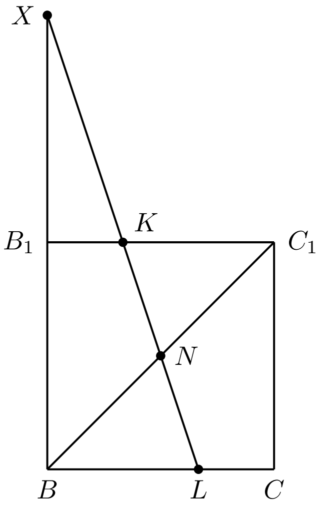

Рис. 2

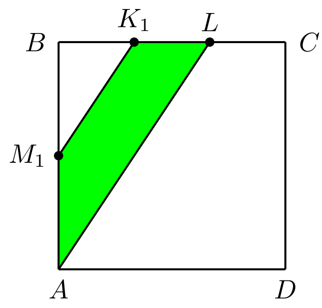

Рис. 3

Спроектируем отрезок MK на основание $ABCD$ (см. рис. 3). Пусть это будет отрезок M_1K_1. В последующем нам понадобится его ширина, вычислим ее как разность высот треугольников ABL и M_1BK_1:

$$h_1 = \frac{AB \cdot BL}{AL} = \frac{1 \cdot 2/3}{\sqrt{1+4/9}} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \qquad h_2 = 1/2\, h_1$$

(это явно следует из подобия рассматриваемых треугольников). Отсюда расстояние h между M_1K_1 и AL равно

$$h = h_1 - h_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

II. Выясним теперь (не применяя производную), какое из сечений, параллельных плоскости AMN имеет наибольшую площадь. Рассмотрим плоскость α, параллельную исходной и проходящую через точку B. Будем сдвинуть плоскость α параллельно самой себе к точке D_1. Первые сечения будут треугольниками (они будут отсекать от куба трехгранный угол с вершиной B), далее (когда α пройдет точку B_1) секущая плоскость начнет пересекать верхнее основание (причем по прямой, параллельной той, по которой пересекается нижнее основание). Таким образом, сечение будет уже трапецией. Очевидно, что если продолжать перенос α к D_1, то вскоре сечения вновь станут треугольниками.

Выясним, что происходит с площадями сечений. Очевидно, что площади треугольников станут первоначально увеличиваться, причем наибольшую площадь из треугольников-сечений будет иметь тот, чья вершина находится в точке B_1. Однако, площади сечений-трапеций будут больше, чем площади треугольников: действительно, нетрудно убедиться, что высоты трапеций будут равны высоте большего из треугольников (и равны друг другу). Нижние же основания трапеций до прохода сечения через точку C будут больше, чем основание треугольника. Из формул площадей для трапеции и треугольника и указанного выше явно следует, что площади трапеций будут больше площадей треугольников.

По счастливому стечению обстоятельств (в силу выбора плоскости (AMN)), среди параллельных сечений не будет ни пяти-, ни шестиугольников.

Выберем теперь трапецию с наибольшей площадью. Как сказано выше, из свойств параллельных плоскостей и их секущей легко показать, что высоты всех трапеций одинаковы. Поэтому наибольшей площадью будет обладать та трапеция, у которой самая большая сумма оснований. Очевидно, что ни одно из сечений не может быть длиннее отрезка AL $\left(AL = \frac{\sqrt{13}}{3}\right)$. Если рассматривать проекции всех сечений-трапеций на $ABCD$, то только у той, чьи вершины проектируются в A, L, C и F (где $F \in AD$ и $AF = 2/3$), сумма оснований будет наибольшей. (Заметим, что эта трапеция превратится в параллелограмм.) Основания ее будут равны AL, а высоты можно найти как высоту в треугольном сечении, прошедшем через точку B_1 (а также M_1 и K_1). Высота эта равна

$$\sqrt{1 + \frac{1}{13}} = \sqrt{\frac{14}{13}},$$

а, значит, наибольшая площадь

$$S_{\max} = \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \sqrt{\frac{14}{13}} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Задача 4. Существует ли описанный около окружности шестиугольник, длины сторон которого — целые числа и их сумма равна 11?

Решение. Пусть A, B, C, D, E, F — последовательные вершины описанного около окружности шестиугольника и A', B', C', D', E', F' — соответствующие точки касания сторон.

Тогда

$$AB + DC + EF = AA' + A'B + CC' + C'D + EE' + E'F,$$
$$BC + DE + FA = BB' + B'C + DD' + D'E + FF' + F'A.$$

По теореме о касательных

$$A'B = BB', \quad B'C = CC', \quad C'D = DB',$$
$$D'E = EE', \quad E'F = FF', \quad F'A = AA'$$

Поэтому $AB + DC + EF = DC + DE + FA$ и сума всех сторон — четное число, что противоречит условию.