Районная олимпиада по математике
г. Хабаровск, 1998 год

9 КЛАСС

Задача 1. Сколько имеется делителей у числа $2^{16}-1$?

Решение. Заметим, что

$$2^{16}-1=(2^8+1)(2^8-1)=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)=257\cdot 17\cdot 5\cdot 3.$$

Поскольку $3, 5, 17, 257$ — простые числа, то у числа $2^{16}-1$ — ровно 16 делителей:

$$1;\ 3;\ 5;\ 17;\ 257;\ 3\cdot 5;\ 3\cdot 17;\ 3\cdot 257;\ 5\cdot 17;\ 5\cdot 257;\ 17\cdot 257;$$
$$5\cdot 17\cdot 257;\ 3\cdot 17\cdot 257;\ 3\cdot 5\cdot 257;\ 3\cdot 5\cdot 17;\ 3\cdot 5\cdot 17\cdot 257.$$

Задача 2. Пусть a — корень уравнения $x^2+x-3=0$. Доказать, что

$$a^5+a^4-2a^3+2a^2-2a-3=0.$$

Решение. Так как

$$x^5+x^4-2x^3+2x^2-2x-3=(x^2+x-3)(x^3+x+1)$$

(этот факт можно установить методом деления с остатком), то любой корень уравнения $x^2+x-3=0$ удовлетворяет и уравнению

$$x^5+x^4-2x^3+2x^2-2x-3=(x^2+x-3)(x^3+x+1)=0.$$

Задача 3. Выпуклый четырехугольник расположен внутри треугольника. Доказать, что периметр четырехугольника меньше периметра треугольника.

Решение. Начнем с простого замечания.
Предложение. Длина проекции $A'B'$ отрезка AB на прямую l не превосходит длины AB.

Утверждение (см. рис. 1) непосредственно следует из теоремы Пифагора для треугольника ABB'', так как

$$AB=\sqrt{AB^2}=\sqrt{(AB'')^2+(BB'')^2}\geq\sqrt{(AB'')^2}=AB''=A'B'.$$

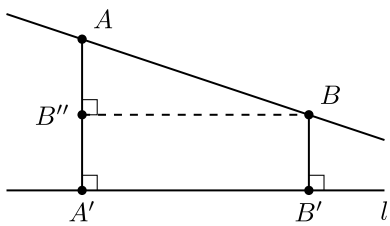

Рис. 1

Вернемся к условию задачи.

Для каждой стороны выпуклого четырех угольника построим перпендикуляры на концах. При этом контур четырехугольника и перпендикуляры расположены в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через сторону (см. рис. 2).

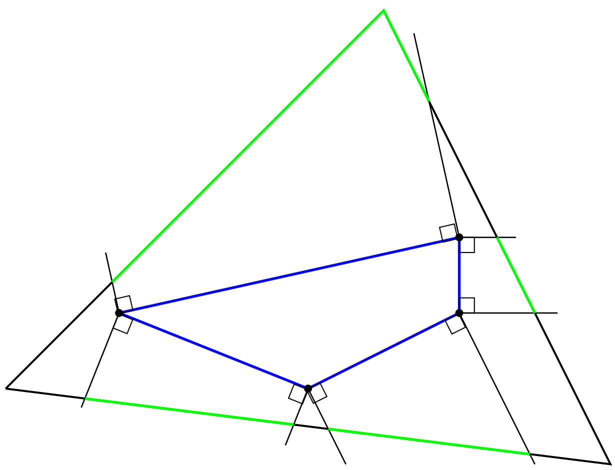
Рис. 2

Они высекают на сторонах треугольника четыре непересекающихся участка двух видов (см. рис. 3 и рис. 4).

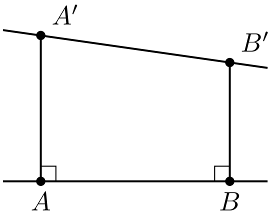

Рис. 3

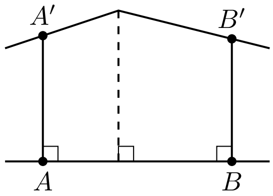

Рис. 4

Их длины, согласно предложению, не меньше длин соответствующих сторон четырехугольника. Поэтому периметр треугольника не меньше периметра четырехугольника.

10 КЛАСС

Задача 1. Сколько делителей у числа 8!?

Решение. У числа 2^7 восемь делителей: 1^1; 2^1; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6; 2^7.

Произведения этих чисел на 1, 3^1, 3^2 составят все $3 \cdot 8 = 24$ делителей числа $2^7 \cdot 3^2$. Точно так же, умножая все делители $2^7 \cdot 3^2$ на 1 и 5, получим все $2 \cdot 24 = 48$ делителей $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$. Повторяя эту процедуру с 1 и 7, получим все $2 \cdot 48 = 96$ делителей числа $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 8!$.

Задача 2. Пусть a — корень уравнения $x^3 + x + 1$. Доказать, что

$$a^5 - 3a^4 + 5a^3 - 2a^2 + a + 4 = 0.$$

Решение. Методом деления с остатком находим

$$x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x^3 + x + 1)(x^2 - 3x + 4).$$

Поэтому любой корень уравнения $x^3 + x + 1 = 0$ удовлетворяет уравнению

$$x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x^3 + x + 1)(x^2 - 3x + 4).$$

Задача 3. Треугольник расположен внутри прямоугольника. Доказать, что его площадь не превосходит половины площади прямоугольника.

Решение. Пусть ABC — произвольный треугольник, расположенный внутри прямоугольника (рис. 1). Продолжим основание AB до пересечения со сторонами прямоугольника в точках A' и B'.

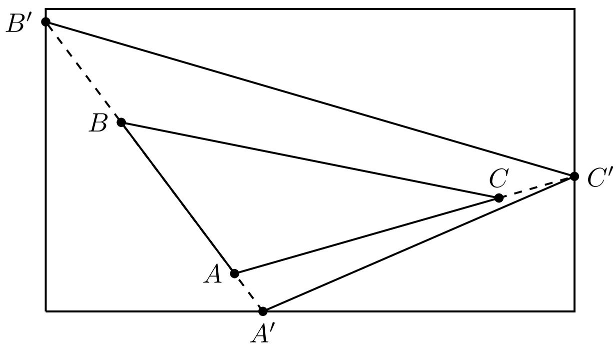

Рис. 1

Очевидно, что площадь $A'B'C$ не меньше площади ABC. Повторяя эту процедуру относительно двух остальных сторон, получим треугольник, вершины которого лежат на сторонах прямоугольника и площадь которого не меньше площади исходного треугольника. Возможны два варианта.

Первый случай. Вершины нового треугольника лежат на разных сторонах треугольника (рис. 2).

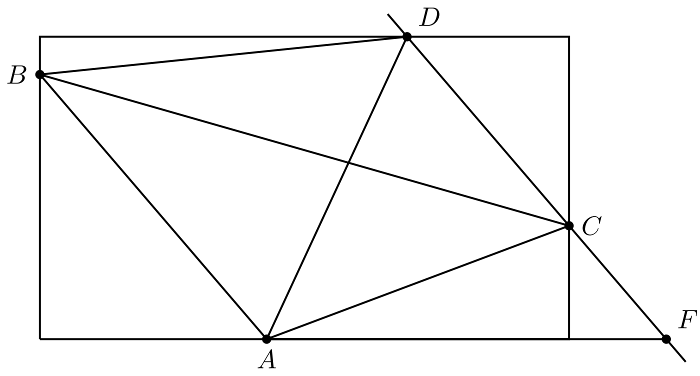

Рис. 2

Если провести через C прямую, параллельную AB, то легко увидеть, что

$$S_{ABC} \leq S_{ABD} \leq S_{AFD}.$$

Площадь AFD равна половине площади прямоугольника.

Второй случай. Две вершины нового треугольника лежат на одной стороне прямоугольника (рис. 3).

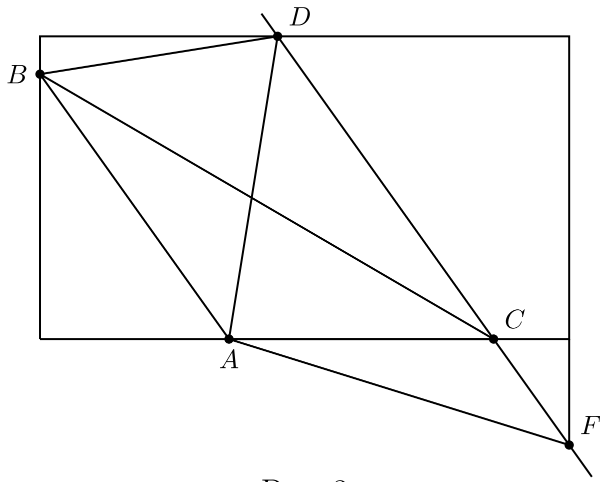

Рис. 3

Тогда $S_{ABC} \leq S_{ADF}$ и площадь ADF равна половине площади прямоугольника.

Таким образом, мы доказали, что площадь любого треугольника, расположенного внутри прямоугольника, не превосходит половины его площади.

11 КЛАСС

Задача 1. Найти общее количество натуральных чисел, не превосходящих 7! и взаимно простых с 5!.

Решение. В $5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ входят только простые множители $2,\ 3,\ 5$. Поэтому число n взаимно простое с $5!$ только в том случае, когда n не делится на $2,\ 3,\ 5$. Разобьем все натуральные от 1 до $7!$ на тридцать прогрессий вида

$$30k + r \qquad \left(k = 0, 1, \ldots, \frac{7!}{30} - 1\right). \tag{1}$$

с $r = 1, 2, \ldots, 30$. Число вида (1) не делится на $2,\ 3,\ 5$ только тогда, когда на них не делится r. Легко проверить, что это выполнено только для

$$r = 1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29.$$

Поэтому общее количество натуральных чисел, не превосходящих $7!$ и взаимно простых с $5!$, равно

$$8 \cdot \frac{7!}{30} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 1344.$$

Задача 2. Пусть a — корень уравнения $x^3 + x + 1 = 0$. Доказать, что a^2 удовлетворяет уравнению $x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$.

Решение. Пусть a — корень уравнения $x^3 + x + 1 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
x^3 + x + 1 &= \big((x-a) + a\big)^3 + x + 1 = \\
&= (x-a)^3 + 3a(x-a)^2 + 3a^2(x-a) + a^3 + x + 1 = \\
&= (x-a)^3 + 3a(x-a)^2 + (3a^2+1)(x-a) = \\
&= (x-a)\big((x-a)^2 + 3a(x-a) + 3a^2 + 1\big).
\end{aligned}$$

Заменяя в этом равенстве x на $-x$, получим еще одно

$$-x^3 - x + 1 = -(x+a)\big((x+a)^2 - 3a(x+a) + 3a^2 + 1\big).$$

Поэтому для $y = x^2$

$$\begin{aligned}
y^3 + 2y^2 + y - 1 = x^6 + 2x^4 + x^2 - 1 &= (x^3 + x + 1)(x^3 + x - 1) = \\
&= (x^2 - a^2)\big((x-a)^2 + 3a(x-a) + 3a^2 + 1\big)\times \\
&\times\big((x+a)^2 - 3a(x+a) + 3a^2 + 1\big).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $y = x^2 = a^2$ удовлетворяет уравнению $y^3 + 2y^2 + y - 1 = 0$.

Задача 3. Площадь и периметр одного треугольника равны 20м^2 и 20м соответственно, а другого — 30м^2 и 30м. Можно ли первый треугольник поместить внутри второго?

Решение. Пусть O — центр вписанной в треугольник ABC окружности радиуса r, S — площадь ABC, $P = a + b + c$ — периметр ABC.

Тогда

$$S = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = \frac{rP}{2}.$$

Следовательно,

$$r = \frac{2S}{P}.$$

Любая другая окружность, расположенная внутри ABC, имеет радиус меньший r. Из условия задачи следует, что радиусы вписанных окружностей обоих треугольников равны 2м. Поэтому первый нельзя поместить внутри второго.