Районная олимпиада по математике
г. Хабаровск, 2000 год

9 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что для любого $x > 1$ выполняется неравенство

$$x^8 - 2\sqrt{x} + 1 > 0.$$

Решение. Поскольку для $x > 1$

$$x^8 > x^2 \quad \text{и} \quad \sqrt{x} < x,$$

то

$$x^8 - 2\sqrt{x} + 1 > x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0.$$

Задача 2. Найти все четверки натуральных чисел a, b, c, d для которых $a < b < c < d$ и

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 2.$$

Решение. Поскольку

$$2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{4}{a},$$

то $a < 2$. Поэтому $a = 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$$

и $b \geq 2$. При этом

$$1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{3}{b}.$$

То есть, $b < 3$. Поэтому $b = 2$.
Таким образом,

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2}$$

и $c \geq 3$. Далее

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} < \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{c}.$$

Следовательно, $3 \leq c < 4 \Rightarrow c = 3$. Окончательно находим

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad d = 6.$$

Задача имеет единственное решение с

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 6.$$

Задача 3. Биссектрисы углов трапеции делят каждое из ее оснований на три равные части. Найти площади трапеций, если ее высота равна 1.

Решение. Пусть AD — большее основание трапеции $ABCD$, а AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — биссектрисы углов при вершинах A, B, C, D соответственно. По условию $AB_1 = B_1C_1 =$

$= C_1D$ и $BD_1 = D_1A_1 = A_1C$. Пусть $BC = 3a$. Из того, что AA_1 и BB_1 являются биссектрисами соответствующих углов, следует, что $BA_1 = AB = AB_1$. Это вытекает из равенства углов:

$$\angle BA_1A = \angle A_1AD = \angle BAA_1, \quad \angle ABB_1 = \angle B_1BC = \angle BB_1A.$$

Таким образом, $AB = 2a$, $AD = 6a$ и при этом трапеция равнобедренная. Проведя высоту BM, по теореме Пифагора получим $4a^2 - 9a^2/4 = 1$. Следовательно, $a = 2/\sqrt{7}$ и площадь трапеции равна $9/\sqrt{7}$.

Задача 4. На балу каждый кавалер танцевал с тремя дамами, а каждая дама с тремя кавалерами. Докажите, что число кавалеров равно числу дам.

Решение. Пусть m — число кавалеров, n — число дам, k — число танцевальных пар. По условию

$$3m = k = 3n.$$

Следовательно, $m = n$.

10 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что для любого $t > 1$ выполняется неравенство

$$t^3 + t^2 - 3t + 1 > 0.$$

Решение. Заметим, что для $t > 1$

$$t + 1 > 2, \quad t - \frac{3}{4} > \frac{1}{4}.$$

Поэтому

$$t^3 + t^2 - 3t = 1 = t^2(t+1) - 3t + 1 > 2t^2 - 3t + 1 =$$
$$= 2\left(t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\right) = 2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + 1 - \frac{9}{8} >$$
$$> 2 \cdot \frac{1}{4^2} + 1 - \frac{9}{8} = 0.$$

Задача 2. Сколько существует пар натуральных чисел (m, n) для которых

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{29}.$$

Решение. Соотношение эквивалентно следующему

$$29(m + n) = mn.$$

перенесем левую часть в правую и к обеим частям прибавим 29^2. В результате получим

$$29^2 = (m - 29)(m - 29).$$

Имеется ровно три представления 29^2 в виде произведения трех натуральных чисел:

$$29^2 = 1 \cdot 29^2 = 29 \cdot 29 = 29^2 \cdot 1.$$

Поэтому имеется ровно три пары нужных m и n:

$$(29+1, 29+29^2), \quad (29+29, 29+29), \quad (29+29^2, 1+29).$$

Задача 3. Построить циркулем и линейкой треугольник по двум сторонам a и b, если известно, что угол против одной из них в два раза больше угла против второй.

Решение. Пусть ABC — треугольник со сторонами $AB = a$, $BC = b$ и $\angle A = 2\angle B$. Проведем через вершину A биссектрису, пересекающую сторону BC в точке K. Из подобия треугольников ABC и AKC находим, что

$$KC = \frac{b^2}{a}, \quad KA = KB = a - KC = a - \frac{b^2}{a}.$$

Мы можем построить AKC (а вместе с ним и ABC) по известным его сторонам.

Задача 4. Имеется три одинаковых детских кубика и линейка. Как без всяких вычислений измерить большую диагональ кубика?

Решение. Поставим один кубик на другой так, чтобы их грани совпали. Затем третий кубик приставим к нижнему также по общей грани. Измеряем линейкой расстояние между одной из верхних вершин второго кубика и дальней верхней вершиной третьего кубика.

11 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что для $x > 1$

$$x^{\frac{11}{5}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 1 > 0.$$

Решение. Заметим, что для $x > 1$

$$x^{\frac{11}{5}} > x^2, \qquad x^{\frac{2}{3}} < x.$$

Поэтому

$$x^{\frac{11}{5}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 1 > x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0.$$

Задача 2. Пусть последовательность x_n $(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ определяется по правилу

$$x_{n+1} = x_0 + x_1 + \dots + x_n + 1$$

и $x_0 = 1$. Доказать, что для любого натурального k

$$x_{2k} = x_k^2.$$

Решение. Докажем методом математической индукции, что $x_n = 2^n$. Для $n = 0$ утверждение верно. Пусть для всех $0 \le n \le k$ выполняется равенство $x_n = 2^n$. Тогда

$$x_{k+1} = x_0 + x_1 + \dots + x_k + 1 = 1 + 2 + \dots + 2^k + 1 = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} + 1 = 2^{k+1}.$$

Следовательно, для любого n $x_n = 2^n$. Поэтому

$$x_{2k} = 2^{2k} = \left(2^k\right)^2 = x_k^2.$$

Задача 3. Найти углы трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если известно, что $AB = BC$ и $BC + CD = AD$.

Решение. Из равенства $BC+CD = AD$ следует, что на основании AD найдется точка K такая, что $AK = BC$ и $DK = DC$. Четырехугольник $ABCK$ является ромбом, поэтому углы BAC, CAK, BCA и ACK равны.

Обозначим через α и β углы ADC и DCK соответственно. Треугольники ACD и CDK — равнобедренные, поэтому $\angle BAC = \angle BCA = \angle CAK = \angle CDA = \angle ACK = \alpha$ и $\angle DCK = \angle DKC = \beta$. Записав равенство углов BCK и CKD, а также теорему о сумме углов для треугольника CDK, получим

$$\beta = 2\alpha, \qquad 2\beta + \alpha = 180^0.$$

Отсюда находим, что $\alpha = 36^0$, $\beta = 72^0$. Поэтому $\angle BAC = 2\alpha = 72^0$, $\angle ABC = 180^0 - 2\alpha = 108^0$, $\angle BCD = 2\alpha + \beta = 144^0$, $\angle CDA = \alpha = 36^0$.

Задача 4. можно ли из двух одинаковых кругов вырезать по остроугольному треугольнику с вершинами на окружности так, чтобы один из них мог поместиться целиком внутри другого?

Решение. Предположим, что это можно сделать. Расположим один вырезанный треугольник внутри другого и опишем вокруг обоих треугольников окружности. Меньший треугольник лежит внутри обеих окружностей: в одну он вписан сам, а в другую вписан треугольник, внутри которого он расположен. Значит, вершины меньшего треугольника лежат на дуге одной окружности, расположенной внутри другой окружности. Поскольку окружности одинаковые, эта дуга меньше 180^0. Мы видим, что один из углов меньшего треугольника опирается на дугу окружности, большую 180^0. Значит, этот угол тупой. Мы получили противоречие.