Районная олимпиада по математике
г. Хабаровск, 2001 год

9 КЛАСС

Задача 1. Пусть n $(n \geq 3)$ различных точек расположены на плоскости так, что любые три из них лежат на одной прямой. Доказать, что все они лежат на одной прямой.

Решение. Зафиксируем любые две точки из набора и проведем через них прямую. Тогда по условию любая из из остальных точек лежит на этой прямой. А это и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что для любого натурального k найдется $m = m(k)$ такое, что ($[x]$ — целая часть $x \in \mathbb{R}$):

$$\left[\sqrt{m+1}\right] = \left[\sqrt{m+2}\right] = \cdots = \left[\sqrt{m+k}\right].$$

Решение. Положим $m = k^2$. Тогда для любого $l = 1, 2, \ldots, k$

$$k^2 < m + l = k^2 + l \leq k^2 + k < k^2 + 2k + 1.$$

Отсюда следует, что

$$k < \sqrt{k^2 + l} < k + 1.$$

Поэтому

$$\left[\sqrt{k^2+l}\right] = \left[\sqrt{k^2+2}\right] = \cdots = \left[\sqrt{k^2+k}\right] = k.$$

Задача 3. Найти все решения в натуральных числах уравнения

$$n^2 + n + 2 = m^2.$$

Решение. Умножив обе части уравнения на 4, получим

$$4n^2 + 4n + 8 = (2m)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(2n+1)^2 + 7 = (2m)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$7 = (2m)^2 - (2n+1)^2 = (2m - 2n - 1)(2m + 2n + 1).$$

Поэтому $2m - 2n - 1 = 1$ и $2m + 2n + 1 = 7$. Отсюда находим единственное решение

$$n = 1, \quad m = 2.$$

Задача 4. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Доказать, что для некоторых положительных x, y, z выполняются равенства:

$$a = y + z, \quad b = x + z, \quad c = x + y.$$

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = c, \\ y + z = a, \\ z + x = b, \end{cases}$$

получим

$$x = \frac{1}{2}(b + c - a), \quad y = \frac{1}{2}(a + c - b), \quad z = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Поскольку в треугольнике сумма длин двух сторон всегда больше третьей, то x, y, z — положительные числа. А это и требовалось доказать.

Задача 5. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — любые вещественные числа из отрезка $[-1, 1]$. Доказать, что

$$|x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1x_2 - x_3x_4| \leq 4.$$

Решение. Заметим, что

$$y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1x_2 - x_3x_4 = (1 + x_1)(1 + x_2) - (1 - x_3)(1 - x_4).$$

Справа стоит разность двух неотрицательных чисел, каждое из которых не превосходит 4. Поэтому $|y| \leq 4$. Неравенство доказано.

10 КЛАСС

Задача 1. Сколько раз встречается число 16 в последовательности $x_n = \left[\sqrt[3]{n^2}\right]$: ($n = 1, 2, 3, \ldots$; $[x]$ — целая часть вещественного x).

Решение. Равенство $\left[\sqrt[3]{n^2}\right] = 16$ выплняется только в случае, если

$$16 \leq \sqrt[3]{n^2} < 17$$
$$\Updownarrow$$
$$64 = (\sqrt{16})^3 \leq n < (\sqrt{17})^3 = 17\sqrt{17}.$$

Легко проверить (возведением в квадрат), что

$$70 < 17\sqrt{17} < 71.$$

Поэтому $\left[\sqrt[3]{n^2}\right] = 16$ только для $n = 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70$. То есть, число 16 встречается в последовательности 7 раз.

Задача 2. Найти высоту равнобедренной трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна S.

Решение. Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD до пересечения с продолжением основания трапеции AD в точке E.

Так как трапеция равнобедренная, а диагонали ее взаимно перпендикулярны, то треугольник ACE равнобедренный и прямоугольный. Пусть CF — высота длины h. Поскольку $AF = FE = CF = h$, то $BC + AD = AE = 2h$. Отсюда следует равенство

$$S = \frac{1}{2}(BC + AD)h = h^2.$$

Окончательно находим, что $h = \sqrt{S}$.

Задача 3. Пусть $a + b + c = 0$. Доказать, что

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Решение. Утверждение задачи непосредственно следует из легко проверяемого тождества
$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Задача 4. Решить в натуральных числах уравнение
$$m^3+3m^2=n^3+19.$$

Решение. Заметим, что
$$m^3+3m^2=n^3+19$$
$$\Updownarrow$$
$$(m+1)^3-n^3=3m+20.$$
Поскольку $n\le m$, то $3m+20\ge(m+1)^3-m^3=3m^2+3m+1$.
То есть,
$$3m^2\le 19.$$
Поэтому $m=1$ или 2. Из двух вариантов для m проходит только один с $m=2$ и $n=1$.

Задача 5. Многоугольник без самопересечений (на плоскости) разбит на непересекающиеся треугольники. Пусть n_0 — число точек, являющихся вершинами треугольников, n_1 — число отрезков, являющихся сторонами треугольников, n_2 — количество треугольников. Доказать, что
$$n_0-n_1+n_2=1.$$

Решение. Проведем индукцию по n_0. Если $n_0=3$, то $n_1=3$ и $n_2=1$. В этом случае $n_0-n_1+n_2=3-3+1=1$. База индукции установлена.

Предположим теперь, что утверждение верно для $n_0=k$.

Рассмотрим случай $n_0=k+1$. Выберем любую вершину P на исходном многоугольнике. Предположим, что она соединена l отрезками с другими точками. Удалив ее вместе с выходящими из нее отрезками, мы получим конфигурацию, для которой
$$n_0'=k,\ \ n_1'=n_1-l,\ \ n_2'=n_2-l+1.$$
По предположению индукции
$$1=n_0'-n_1'+n_2'=(n_0-1)-(n_1-l)+(n_2-l+1)=n_0-n_1+n_2.$$
А это и требовалось доказать.

11 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что для любого натурального n ($[x]$ — целая часть вещественного x)
$$\left[\sqrt{n^2+3n+1}\right]=n+1.$$

Решение. Заметим, что
$$(n+1)^2=n^2+2n+1<n^2+3n+1<n^2+4n+4=(n+2)^2.$$
Поэтому
$$n+1<\sqrt{n^2+3n+1}<n+2.$$

Отсюда следует, что

$$\left[\sqrt{n^2+3n+1}\right] = n+1.$$

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CD. Пусть r, r_1, r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, ADC, BDC соответственно. Доказать, что

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2.$$

Решение. Поскольку треугольники ABC, ADC, BDC подобны, то

$$\frac{r}{AB} = \frac{r_1}{AC} = \frac{r_2}{BC} = k.$$

Отсюда по теореме Пифагора находим

$$r_1^2 + r_2^2 = k^2AC^2 + k^2BC^2 = k^2AB^2 = (kAB)^2 = r^2.$$

Утверждение доказано.

Задача 3. Найти все пары натуральных чисел n и m, для которых

$$4^n = m^2 + 7.$$

Решение. Заметим, что

$$7 = 4^n - m^2 = (2^n)^2 - m^2 = (2^n - m)(2^n + m).$$

Отсюда следует, что $2^n - m = 1$ и $2^n + m = 7$. Это выполнено только для $n = 2$ и $m = 3$.

Задача 4. Пусть $x = \sin 18^\circ$. Доказать, что

$$4x^2 + 2x = 1.$$

Решение. Заметим, что $4 \cdot \alpha = 90^\circ - \alpha$ для $\alpha = 18^\circ$. Поэтому

$$x = \sin\alpha = \cos 4\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha =$$
$$1 - 8\sin^2\alpha + 8\sin^4\alpha = 1 - 8x^2 + 8x^4.$$

Отсюда находим

$$0 = 8x^4 - 8x^2 - x + 1 = (4x^2 + 2x - 1)(2x^2 - x - 1).$$

Поскольку $0 < x < 1$, то

$$2x^2 - x - 1 < 2x - x - 1 = x - 1 < 0.$$

Значит, $4x^2 + 2x - 1 = 0$. А это и требовалось доказать.

Задача 5. Пусть x и y — любые вещественные числа из отрезка [-1, 1]. Доказать, что

$$|x + x^2 + x^3 - y - y^2 - y^3| \le 4.$$

Решение. Заметим, что для $x \in [0, 1]$
$$x + x^2 + x^3 \leq 3,$$
а для $x \in [-1, 0]$
$$x + x^2 + x^3 \geq x \geq -1.$$

То есть, для $x, y \in [-1, 1]$ выполняется неравенства
$$-1 \leq x + x^2 + x^3 \leq 3, \quad -1 \leq y + y^2 + y^3 \leq 4.$$

Отсюда следует, что
$$|x + x^2 + x^3 - y - y^2 - y^3| \leq 3.$$

Утверждение доказано.