Районная олимпиада по математике
г. Хабаровск, 2002 год

9 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что $x^4 - 4x + 4 > 0$ для любого вещественного x.

(3 балла)

Решение.
$$x^4 - 4x + 4 = (x^2 - 1)^2 + 2(x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Задача 2. На плоскости расположены пять различных точек так, что на каждой прямой, соединяющей две из них, лежит, по крайней мере, еще одна точка. Докажите, что все пять точек лежат на одной прямой.

(3 балла)

Решение. По условию некоторые три точки лежат на одной прямой l. Пусть это будут A_1, A_2, A_3. Остальные две точки — A_4, A_5.

Предположим, что A_4 лежит на l, а A_5 нет. Тогда на A_1A_5 нет третьей точки, чего не может быть.

Предположим, что A_4 и A_5 не лежат на l. Тогда по условию на прямой, проходящей через A_4 и A_5, лежит еще одна точка. Пусть это будет A_1. Но тогда на прямой, проходящей через A_5 и A_3 нет третьей точки, что противоречит условию. Таким образом, A_4 и A_5 лежат на l.

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}(N)$ — количество простых чисел, не превосходящих натурального N. Доказать, что $\mathcal{P}(N) \leq 4 + N/3$.

(4 балла)

Решение. Обозначим через N_2, N_3, N_6 количества натуральных, не превосходящих N, которые делятся на 2, 3, 6 (соответственно). Тогда, принимая во внимание простоту 2 и 3, получим

$$\mathcal{P}(N) \leq 2 + N - N_2 - N_3 + N_6 = 2 + N - \left[\frac{N}{2}\right] - \left[\frac{N}{3}\right] + \left[\frac{N}{6}\right] =$$
$$= 2 + N - \left(\frac{N}{2} - \left\{\frac{N}{2}\right\}\right) - -\left(\frac{N}{3} - \left\{\frac{N}{3}\right\}\right) + \frac{N}{6} - \left\{\frac{N}{6}\right\} =$$
$$= 2 + \frac{N}{3} + \left\{\frac{N}{2}\right\} + \left\{\frac{N}{3}\right\} - \left\{\frac{N}{6}\right\} < 2 + \frac{N}{3} + 1 + 1 = 4 + N/3.$$

Первое неравенство в этой цепочке обусловлено тем, что количество простых не превосходит $2 + M$, где M число натуральных от 1 до N, не делящихся на 2 и 3. При этом $M = N - N_2 - N_3 + N_6$, поскольку при удалении чисел, делящихся на 2 и 3, два раза удаляются кратные 6.

Задача 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \frac{2y^2}{1+y^2} = x \end{cases}$$

(4 балла)

Решение. Легко заметить, что $x = y = 0$ есть решение. Для остальных всегда $x > 0$ и $y > 0$. Перемножив уравнения, получим при этих условиях

$$\frac{4x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = xy \Longleftrightarrow 4xy = (1+x^2)(1+y^2) = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2.$$

Заметим, что

$$0 = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 - 4xy = (x-y)^2 + (1-xy)^2.$$

Поэтому для положительных решений системы выполняются неравенстваґ

$$x = y, \quad xy = 1.$$

Следовательно, $x = y = 1$ — второе решение и других нет.

Задача 5. Доказать, что все числа $x_n = n + \left[\sqrt{n^2 + 2002}\right]$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, начиная с некоторого номера n, четные. Здесь $[x]$ есть целая часть вещественного x.

(5 баллов)

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{n^2 + 2002} = n + \frac{2002}{n + \sqrt{n^2 + 2002}}.$$

При $n \geq 1001$ выполняется неравенство

$$\frac{2002}{n + \sqrt{n^2 + 2002}} \leq \frac{2002}{1001 + \sqrt{(1001)^2 + 2002}} < \frac{2002}{1001 + 10011} = 1.$$

Поэтому $x_n = 2n$ для $n \geq 1001$.

10 КЛАСС

Задача 1. Для какого наименьшего $a \in (0, \infty)$ выполняется при всех положительных x и y с $x \geq y$ неравентсво

$$x^2 + y^2 \leq (x + ay)^2.$$

(3 балла)

Решение. Заметим, что

$$(x + ay)^2 = x^2 + 2axy + a^2y^2 \geq x^2 + 2ay^2 + a^2y^2 = x^2 + (2a + a^2)y^2.$$

Поэтому для всех $x \geq y$ выполняется нужное неравенство, если $2a + a^2 \geq 1 \Leftrightarrow (a+1)^2 \geq$ $\geq 2 \Leftrightarrow a \geq \sqrt{2} - 1$. Если $a < \sqrt{2} - 1$, то

$$2a + a^2 < 2(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2 = 2\sqrt{2} - 2 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 1.$$

Поэтому при $x = y$ неравенство

$$2x^2 = x^2 + y^2 \leq (x + ay)^2 = (1 + a)^2x^2 = (1 + 2a + a^2)x^2$$

не выполняется.

Ответ. $a = \sqrt{2} - 1$.

Задача 2. Доказать, что в последовательности натуральных чисел $x_n = 30n^2 + 1$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ имеется бесконечное множество составных чисел.

(3 балла)

Решение. Рассмотрим последовательность $y_m = x_n$ с $n = 31m + 1$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$. Для нее

$$y_m = 30(31m + 1)^2 + 1 = 30(31^2m^2 + 2 \cdot 31m + 1) + 1 =$$
$$= 31(30 \cdot 31m^2 + 60m + 1).$$

То есть, все числа y_m делятся на 31.

Задача 3. Доказать, что найдутся некоторые два ученика Лицея информационных технологий г. Хабаровска знакомые с одинаковым количеством других лицеистов.

(4 балла)

Решение. Перенумеруем всех лицеистов натуральными числами от 1 до n (n — общее количество учеников ЛИТ). Пусть k_i — число знакомых i-ого лицеиста.

Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда $k_1, k_2, \dots, k_n$ — попарно различные целые числа от 0 до $n - 1$. Поэтому найдется лицеист, который знаком со всеми остальными $n - 1$. Этого не может быть, поскольку имеется лицеист, у которого нет вообще знакомых ($n_i = 0$ при некотором i!).

Следовательно, наше предположение неверно и для некоторых $i \neq j$ выполняется неравенство $k_i = k_j$.

Задача 4. Пусть $0 < a < b$. доказать, что

$$\frac{(a-b)^2}{4b} < a + b - 2\sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{4a}.$$

(4 балла)

Решение. Заметим, что

$$a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2,$$
$$(a-b)^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,$$
$$4a < a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 < 4b.$$

Поэтому

$$\frac{(a-b)^2}{4b} < \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{4a}.$$

Задача 5. Пусть в треугольнике ABC на BC выбрана точка A_1 и на AB точка C_1 так, что отрезки A_1C_1 и AC параллельны. Через точку P, в которой пересекаются отрезки CC_1 и AC_1, а также вершину B проведем прямую до пересечения с AC в точке K. Доказать, что BK есть медиана треугольника ABC.

(5 баллов)

Решение. Выберем на отрезке AC_1 точку C_2 и на CA_1 точку A_2, для которых $KC_2 \| C_1C$ и $KA_2 \| AA_1$. Применяя последовательно теорему Фалеса, получим

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AC_2}{C_1C_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2} - 1 = \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BC_1}{C_1C_2} - 1 = \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BP}{PK} - 1 =$$
$$= \frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{BP}{PK} - 1 = \frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{BA_1}{A_1A_2} - 1 = \frac{CA_1}{A_1A_2} - 1 = \frac{CA_2}{A_1A_2} = \frac{KC}{AK}.$$

Поэтому $AK^2 = KC^2 \Rightarrow AK = KC$.

То есть, BK есть медиана.

11 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что для любых положительных вещественных a и b выполняется неравенство
$$a + 2b \geq 3\sqrt[3]{ab^2}.$$

(3 балла)

Решение. Пусть $a = x^3$ и $b = y^3$. Тогда доказываемое неравенство запишется в виде
$$x^3 - 3xy^2 + 2y^3 \geq 0.$$

Разделив обе части на y^3, получим эквивалентное ему неравенство
$$t^3 - 3t + 2 \geq 0$$

с $t = x/y$. Заметим, что
$$t^3 - 3t + 2 = (t-1)(t^2 + t - 2).$$

Если $t \in (0, 1)$, то $t - 1$ и $t^2 + t - 2$ отрицательные числа и их произведение больше нуля.

Для $t \in (1, \infty)$ оба числа $t - 1$ и $t^2 + t - 2$ положительные и их произведение опять больше нуля.

При $t = 1$ имеем $t^3 - 3t + 2 = 0$.

Таким образом, $t^3 - 3t + 2 \geq 0$ при всех положительных t.

Задача 2. Пусть n и m взаимно простые натуральные числа. Доказать, что $7n + 5m$ и $10n + 7m$ также взаимно просты.

(3 балла)

Решение. Пусть $7n + 5m = dk$ и $10n + 7m = dl$ для некоторых натуральных d, k, l. Из системы
$$\begin{cases} 7n + 5m = dk, \\ 10n + 7m = dl \end{cases}$$

следует, что $n = d(5l - 7k)$ и $m = d(10k - 7l)$.

Если $d > 1$, то n и m не взаимно просты (делятся на d). Значит $d = 1$ всегда и утверждение доказано.

Задача 3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольная возрастающая последовательность неотрицательных вещественных чисел. Доказать, что
$$|x_1 - x_2 + \cdots + (-1)^{n-1}x_n| \leq x_n.$$

(4 балла)

Решение. Пусть рассматриваемая сумма равна S.

Случай $n = 2m+1$ (n нечетное). Тогда

$$S = (x_1 - x_2) + \cdots + (x_{2m-1} - x_{2m}) + x_{2m+1} =$$
$$= x_1 - (x_2 - x_3) - \cdots - (x_{2m} - x_{2m+1}).$$

Из этих представлений для S следует, что

$$0 \le S \le x_{2m+1}.$$

Случай $n = 2m$ (n четное).

$$S = x_1 - (x_2 - x_3) - \cdots - (x_{2m-2} - x_{2m-1}) - x_{2m} =$$
$$= (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \cdots + (x_{2m-1} - x_{2m}).$$

Поэтому

$$-x_{2m} \le x_1 - x_{2m} \le S \le 0.$$

Следовательно, в обоих случаях $|S| \le x_n$.

Задача 4. Восемь городов соединены тринадцатью прямыми авиалиниями. Причем каждый город соединен авиалиниями не менее, чем с тремя другими. Доказать, что между любыми городами имеется соединяющий их маршрут из нескольких авиалиний.

(4 балла)

Решение. Предположим, что найдутся два города A_1 и B_1, между которыми нет маршрута. По условию из A_1 можно перелететь в города A_2, A_3, A_4 и из B_1 в B_2, B_3, B_4. При этом между A_i и B_j нет авиалиний. Из условия задачи следует, что все города из A_1, A_2, A_3, A_4 попарно связаны шестью авиалиниями. Это же верно и в отношении городов B_1, B_2, B_3, B_4. Следовательно, общее количество авиалиний равно $6 + 6 = 12$. Но по условию их тринадцать. Значит наше предположение неверно, и между A_1 и B_1 всегда имеется маршрут.

Задача 5. Пусть $0 < \varphi < \pi/2$. Доказать, что

$$\sin(\cos\varphi) < \cos(\sin\varphi).$$

(5 баллов)

Решение. Точка с координатами $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ лежит на окружности $x^2+y^2 = 1$. Длина дуги этой окружности между точками $(1, 0)$ и $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ равна φ, а длина отрезка, соединяющего точку $(\cos\varphi, 0)$ и $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ равна $\sin\varphi$. Поэтому для любого $\varphi \in (0, \pi/2)$ выполняется неравенство

$$\sin\varphi < \varphi.$$

Поскольку $0 < \cos\varphi < 1 < \pi/2$ и $\cos\varphi$ убывающая функция, то

$$\sin(\cos\varphi) < \cos\varphi < \cos(\sin\varphi).$$