Задания и решения второго (очного) тура региональной олимпиады школьников Хабаровской краевой заочной физико-математической школы и Совета ректоров вузов Хабаровского края и Еврейской автономной области 2011/2012 учебный год

МАТЕМАТИКА

Задача 1. Найти углы треугольника, у которого длины сторон составляют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии.

Решение. Пусть $a \le b \le c$ — стороны треугольника. Так как они составляют арифметическую прогрессию, то $a + c = 2b$. Условие с геометрической прогрессией приводит к равенству $b^2 = ac$ и поэтому

$$(a - c)^2 = (a + c)^2 - 4ac = 4b^2 - 4b^2 = 0.$$

Следовательно $a = b = c$ и треугольник равносторонний; с одинаковыми углами по 60^0.

Задача 2. Пусть n — нечетное натуральное число, которое делится на 3. Обозначим через s количество всех делителей n вида $4k + 1$ (k — неотрицательное целое), а через t количество всех делителей n вида $4k + 3$. Доказать, что если $s \ne t$, то n делится на 9.

Решение. Предположим, что утверждение неверно и n не делится на 9. Пусть $d_1, d_2, \dots, d_k$ — делители n, которые не делятся на 3. Тогда $3d_1, 3d_2, \dots, 3d_k$ — остальные делители. Легко заметь, что все делители n разбиваются на пары чисел $(d_i, 3d_i)$, одно из которых имеет вид $4k + 1$, а второе — $4k + 3$. Поэтому $s = t$, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно и n делится на 9.

Задача 3. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Окружность с центром в точке P и радиусом $R = PB = PC$ пересекает продолжения сторон AB и AC в точках K и L. Докажите, что точки K, L и P лежат на одной прямой.

Решение. По формуле величины угла между прямыми пересекающими окружность, $2\angle A = \smile KL - \smile BC$. Заметим, что угол при вершине A опирается на $\smile BC$ и ему равны углы PBC и PCB (углы между секущей BC и касательными в точках B и C). Значит, $\smile KL = 2\angle A + \smile BC = \angle PBC + \angle PCB + \angle BPC = 180^0$. А это и требовалось доказать.

Задача 4. Пусть $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{2\pi x}{3})$. Доказать, что $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ для любых целых a и b.

Решение. Так как функция синус периодична с периодом 2π, то $f(x + 3) = f(x)$ для любого x. Поэтому $f(c)$ для целых c однозначно определяются своими значениями на остатках от деления c на 3: $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = -1$. Если одно из чисел a и b равно 0, то в доказываемом равенстве справа и слева стоят одинаковые числа — нули. В остальных случаях

$$f(1 \cdot 1) = f(1) = 1 = f(1) \cdot f(1),$$

$$f(1 \cdot 2) = f(2) = -1 = f(1) \cdot f(2),$$

$$f(2 \cdot 2) = f(4) = f(1) = 1 = f(2) \cdot f(2).$$

Утверждение доказано.

Задача 5. Пусть $a(n)$ — последовательность, которая задаётся начальными значениями $a(0) = 1$, $a(1) = 3$ и рекуррентным соотношением $a(n+2) = a(n) + a(n+1)$, а последовательность $b(n)$ задаётся начальными значениями $b(0) = 2$, $b(1) = 1$ и рекуррентным соотношением $b(n+2) = b(n) - b(n+1)$. Вычислить $a(2011)b(2012) + a(2012)b(2011)$.

Решение. Заметим, что для любого натурального n

$$c(n+1) = a(n)b(n+1) + a(n+1)b(n) =$$

$$= a(n)\left(b(n-1) - b(n)\right) + \left(a(n-1) + a(n)\right)b(n) =$$

$$= a(n)b(n-1) + a(n-1)b(n) = c(n).$$

Поэтому все элементы последовательности $c(n)$ совпадают друг с другом и интересующее нас число равно $c(2012) = c(1) = a(0)b(1) + a(1)b(0) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7$.