Всероссийская олимпиада студентов
образовательных организаций высшего образования по математике
III тур
Хабаровск-2016

Задача 1. Пусть A – невырожденная вещественная матрица размера $n \times n$ и A^t – транспонированная к ней. Предположим, что $A + A^t$ – нулевая матрица. Докажите, что n – чётное число.

Доказательство. Так как $\det A = \det(-A^t) = (-1)^n \det A$, то n – чётное число.

Задача 2. Пусть $N(a, b)$ – количество всех различных вещественных корней уравнения

$$f(x) = x^{2016} + ax + b = 0$$

относительно неизвестной x. Найдите максимальное значение $N(a, b)$ по всем вещественным a и b.

Решение. Предположим, что $N(a, b) \geq 3$ и $x_1 < x_2 < x_3$ – корни уравнения. Тогда у производной

$$f'(x) = 2016x^{2015} + a$$

найдутся два корня в интервалах (x_1, x_2) и (x_2, x_3). А этого не может быть из-за монотонного возрастания производной. Следовательно, $N(a, b) \leq 2$. При этом $N(-1, 0) = 2$.

Задача 3. Докажите, что не существует:
а) функций $f_1, g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, таких что для любых вещественных x и y

$$x - y = f_1(x)g_1(y);$$

б) функций $f_1, g_1, f_2, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, таких что для любых вещественных x и y

$$(x - y)^2 = f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y);$$

в) функций $f_1, g_1, \ldots, f_k, g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$, таких что для любых вещественных x и y

$$(x - y)^k = f_1(x)g_1(y) + \cdots + f_k(x)g_k(y).$$

Доказательство.
Полагая $y = 0, 1, \ldots, k$ получим систему из $k + 1$ линейных уравнений относительно k неизвестных $f_1(x), \ldots, f_k(x)$. Так как многочлены

$$x^k, (x - 1)^k, \ldots, (x - k)^k$$

– линейно независимы, то система неразрешима.

Задача 4. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – бесконечно дифференцируемая функция, для которой $f(0) = 1$ и $f(2x) = f^2(x)$ при любом вещественном x. Докажите, что найдётся вещественное a, для которого $f(x) = e^{ax}$.

Доказательство.

Положим $g(x) = f(x)e^{-f'(0)x}$. Для этой функции $g(0) = 1$ и $g'(0) = 0$. Поэтому $g(x) = 1 + \theta(x)x$, где $\theta(x) \to 0$ при $x \to 0$. Очевидно, что $g(2x) = g^2(x)$ и при этом

$$g(x) = g^2\left(\frac{x}{2}\right) = g^{2^2}\left(\frac{x}{2^2}\right) = \dots = g^{2^k}\left(\frac{x}{2^k}\right) = \left(1 + \theta\left(\frac{x}{2^k}\right)\frac{x}{2^k}\right)^{2^k}.$$

Напомним, что для любого y

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{y}{2^k}\right)^{2^k} = e^y.$$

Поскольку $\theta(x \cdot 2^k) \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$g(x) = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \theta\left(\frac{x}{2^k}\right)\frac{x}{2^k}\right)^{2^k} = 1.$$

То есть, $f(x) = e^{f'(0)x}$.